युक्लिडच्या सरलरेखागणिताचीं मूलतत्वें.

ह्या विषयाचा मूळ ग्रंथ इंग्रेजी भाषेंत ए. बेल साहेबानें केला आहे, त्याचें हें मराठी भाषांतर

नानाशास्त्री आपटे

पुणे पाठशाळेंतील ट्रान्स्लेशन् एक्सिबिशनर

ह्यांनीं केलें तें

मेहरबान डैरेक्टर आफ् पब्लिक् इन्स्ट्रक्शन् ह्यांचे हुकुमावरून

पुणे पाठशाळेकडील छापखान्यांत

छापिलें.

POONA UNIVERSITY LIBRARY

मुकाम पुणें

छापणार नारो रामचंद्र रुकार मु. ना.

इसवीसन १८५७

शके १७७९

B6:6x C70
155,A
39806
39806

सरलरेखागणिताचीं मूलतत्वें.

बूक पहिलें.

१ गणितविद्येमध्यें परिमेय वस्तूंविषयीं विचार केला आहे.

२ रेखागणित (भूमिति) हा गणितविद्येचा एक प्रकार आहे. ह्यामध्यें परिमाणांविषयीं विचार आहे.

३ परिमाणांस एक किंवा दोन, किंवा तीन मापें असतात. जसें, रेषेस, लांबी हें एकच माप आहे; पातळीस, लांबी आणि रुंदी अशीं दोन मापें आहेत; आणि भरींवास, लांबी, रुंदी आणि उंची अशीं तीन मापें आहेत. परिमाणें आकृतींनीं दर्शवितां येतात.

४ सरलरेखागणित (सरळरेषाभूमिति) हा एक रेखागणिताचा भाग आहे. ह्यांत पातळीवर काढलेल्या परिमाणांचा विचार केला आहे.

व्याख्या.

१ ज्यास स्थितिमात्र आहे, परंतु परिमाण नाहीं, बिंदु असें म्हणतात.

२ ज्यास रुंदी नाहीं, व लांबी मात्र आहे, त्यास रेघ असें म्हणतात.

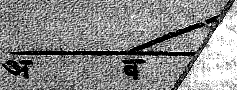
रेघेच्या दोहों टोकांजवळ एक एक अक्षर लिहून त्या अक्षरांनीं प्रायः तिला संज्ञा देतात. जसें, अ ब रेघ.

कु० रेघेचीं टोकें बिंदुरूप असतात, आणि एक रेघ दुसरे रेघेस ज्या स्थळीं छेदिते तें स्थळही बिंदुरूप असतें.

३ ज्या रेघा दोन बिंदुस्थलीं जमल्या असतां सर्वांशीं जमल्यावांचून रहातच नाहींत त्यांस सरळरेघा म्हणतात.

कु० ह्यावरून स्पष्ट दिसतें, कीं कोणत्याही अवकाशाचें वेष्टन दोन सरळरेघांनीं व्हावयाचें नाहीं, व दोन सरळ रेघांस साधारण खंडही असावयाचा नाहीं, कारण त्या अंशतः जमल्या असतां सर्वांशीं जमल्यावांचून राहावयाच्या नाहींत.

जसें, अबक आणि अबड ह्या दोन रेघांस



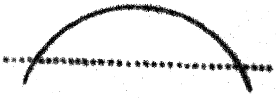
अ व खंड साधारण आहे, परंतु त्या दोन्ही कांहीं सरळ रेषा नाहींत.

४ **वांकडीरेघ** दोन किंवा दोहोंपेक्षां अधिक सरळ रेषांच्या योगानें होते.

५ ज्या रेषेचा एकही अंश सरळ रेघ नसतो तीस **वक्ररेषा** म्हणतात.

६ सरळ आणि वक्ररेषा मिळून जी रेघ होते तिला **मिश्ररेषा** म्हणतात.

७ ज्या वक्ररेषेचा दोहोंपेक्षां अधिक ठिकाणीं सरळ रेषेनें छेद होत नाहीं, ती रेघ



बहिर्वक्र किंवा **अंतर्वक्र** असते. वक्ररेषेची छेदक रेषेकडे जी वक्रता असते ती **अंतर्वक्रता**, आणि उलट दिशेकडे जी असते ती **बहिर्वक्रता**.

८ ज्यास लांबी व रुंदी हीं माप असतात त्यास **पातळी** असें म्हणतात.

कु० पातळीचीं दोवटें रेषा होत, आणि एक पातळी दुसऱ्या पातळीस ज्या स्थळीं छेदिते, तें स्थळ रेषारूप

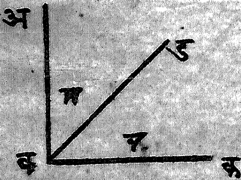
---

* सामान्यतः रेघ म्हटलें असतां सरळरेघ असें समजावें.

९ ज्या पातळीवर कोठेंही दोन बिंदु घेतले असतां त्यां-च्या मधील सरळरेघ सर्वांशीं पातळींत असते, त्या पातळीस **सरळपातळी** असें म्हणतात.

१० एका सरळ रेघेंत नसणाऱ्या अशा दोन स[illegible] परस्परांस मिळाल्या असतां त्यांच्यामध्यें जी व[illegible]ते तीस **सरळरेघकोन** असें म्हणतात.

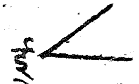
ज्या रेघांच्यामध्यें कोन असतो त्या रेघांस त्याच्या बाजू असें म्हणतात, आणि त्या ज्या बिंदूंत एकत्र मिळ-तात त्या बिंदूस **कोणबिंदु** असें म्हणतात. जसें, **अब** आणि **बड** रेघा **ब** बिंदूंत मिळून **अबड** कोन करि-



तात. त्यास **अब** आणि **बड** ह्या रेघा **अबड** कोना-च्या बाजू होत, व **ब** हा कोणबिंदु होय. कोनाच्या बा-जूंस संज्ञा देण्याकरितां जीं तीन अक्षरें योजितात त्याच तीन अक्षरांनीं कोनासही संज्ञा देण्याची चाल आहे, परं-तु कोणबिंदूवर लिहिलेलें अक्षरमात्र मध्यें आणितात. जसें, **अब** आणि **बड** ह्या दोन रेघांच्या मधील [illegible] नास **अबड** किंवा **डबअ** असें म्हणत[illegible] **ड** आणि **बक** ह्या रेघांच्या मधील कोनास **डब**[illegible]

क किंवा कबड असें म्हणतात; अब आणि ब क ह्या रेषांच्या मधील कोनास अबक किंवा कब[illegible] गतात.

[illegible] एकाबिंदूत एकच कोन झाला असला तर त्याच्या एकच अक्षर पुरतें. जसें, ई कोन.



कोनामध्यें एक अक्षर लिहून त्यानेंही कोनास संज्ञा देतात. जसें, अबड कोनास म कोन व डबक कोनास न कोन म्हटलें असतां चालेल.

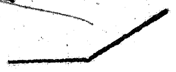
११ एक रेघ दुसरे रेघेवर उभी असून जे दोन कोन पडतात ते जर परस्पर बरोबर असतील तर त्यांपैकीं प्रत्येकास काटकोन म्हणावें, आणि जी रेघ उभी असते तीस लंब म्हणावें.

१२ एक रेघ दुसरे रेघेस मिळाली असतां तिचे एकेच आंगास जे दोन कोन पडतात, त्यांस पूरककोन (सप्लिमेंट) म्हणतात. जसें, अब रेघेस डक रेघ मिळून अकड आणि बकड असे दोन कोन पडले आहेत त्यांस पूरककोन म्हणतात.

[illegible] कोणताही कोन आणि काटकोन ह्यांच्या मधल्या अंतराचा जो कोन त्यास भरतीचा कोन (कांप्लिमेंट)

असें म्हणतात. (दहाव्या व्याख्येची आकृति पाहा) अ ब क कोन काटकोन आहे, व म आणि न हे भरतीचे कोन होत.

१३ काटकोनापेक्षां जो कोन मोठा असतो त्यास शाळकोन म्हणतात.

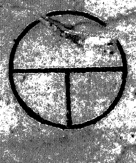


१४ काटकोनापेक्षां जो लहान असतो त्यास लघु-कोन म्हणतात.

१५ जो कोन काटकोन नसतो त्यास तिर्यक्कोन असें म्हणतात. काटकोनाहून जे दोन कोन लहान किंवा मोठे असतात त्यांस सजातीयकोन म्हणतात.

१६ ज्याचे सभोंवतीं मर्यादेच्या रेषा असतात त्यास आकृति असें म्हणावें. कोणत्या एका आकृतीमध्यें जो अवकाश असतो त्यास क्षेत्र म्हणावें, आणि तेंच मापलें असतां त्यास क्षेत्रफल म्हणावें.

१७ जी आकृति एका वक्ररेषेनें वेष्टित असते व जी मध्यें असा एक बिंदु असतो, कीं ज्यापासून त्या वक्ररेषे-पर्यंत कितीही रेषा काढल्या असतां त्यांची लांबी सारखी भरते त्या आकृतीस वर्तुळ असें म्हणतात, त्या वेष्टणाऱ्या वक्ररेषेस वर्तुळाचा परिघ असें म्हणतात व त्या विशेषबिंदूस



र्तुळाचा मध्यबिंदु असें म्हणतात

१८ वर्तुळांतील मध्यबिंदूशिवाय इतरबिंदूंस **मध्य-बाह्यबिंदु** म्हणतात.

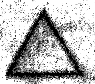
१९ वर्तुळाच्या मध्यापासून परिघापर्यंत काढलेल्या रेषेस **त्रिज्या** असें म्हणतात.

२० जी रेघ वर्तुळमध्यबिंदूंतून जाऊन परिघास दोन्ही अंगांनीं मिळते त्या रेषेस **वर्तुळाचा व्यास** असें म्हणतात.

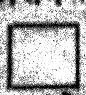
२१ व्यास व त्यानें छेदलेला परिघाचा भाग ह्या दोहोंच्या मध्यें जो वर्तुळाचा भाग सांपडतो, त्यास **अर्धवर्तुल** असें म्हणतात.

२२ ज्या आकृति सरलरेषांनीं झाल्या असतात त्यांस **सरलरेषाकृति** म्हणतात.

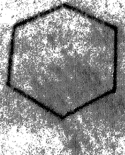
२३ तीन सरलरेषांनीं जी आकृति वेष्टित असते तीस **सरलरेषत्रिकोण** असें म्हणतात.



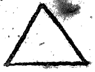
२४ चार सरळ रेषांनीं जी आकृति वेष्टित असते तीस **सरलरेषचतुष्कोण** असें म्हणतात.



२५ चहूंपेक्षां अधिक सरल रेषांनीं जी आकृती वेष्टित असते तीस **बहुकोणाकृति** असें म्हणतात.



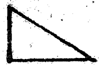
२६ ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू सम असतात त्यास **समभुज** (समबाजू) त्रिकोण म्हणतात.



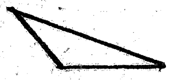
२७ ज्या त्रिकोणाच्या दोनच बाजू सम असतात त्यास **समद्विभुज** (समद्विबाजू) त्रिकोण म्हणतात.

२८ ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू विषम असतात त्यास **विषमभुज** (विषमबाजू) त्रिकोण म्हणतात.

२९ ज्या त्रिकोणांत एक कोन काटकोन असतो त्यास **काटकोन त्रिकोण** म्हणतात.



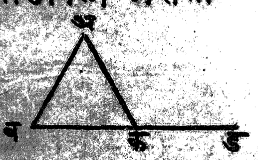
३० ज्या त्रिकोणामध्यें एक विशालकोन असतो त्यास **विशालकोण त्रिकोण** असें म्हणतात.



३१ ज्या त्रिकोणाचे तिन्ही कोन लघु असतात त्यास **लघुकोण त्रिकोण** असें म्हणतात.

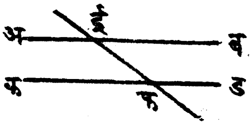
३२ दोन रेषांनी परस्परांस छेदिलें असतां जे कोन समोरासमोर होतात, त्यांस **समोरासमोरचे कोन** असें म्हणतात. जसें, **अईक** आणि **बईड** हे समोरासमोरचे कोन होत.

३३ त्रिकोणाची कोणतीही बाजू वाढविली असतां बाहेरल्या अंगास जो कोन होतो त्यास **बाहेरील कोन** म्हणतात. जसें, **अकड** हा बाहेरील कोन आहे.

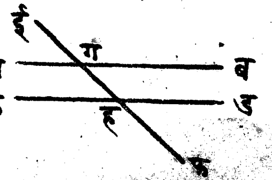


३४ ज्या दोन सरळरेघा एका पातळींत असून दोन्ही अंगांस कितीही वाढविल्या असतां एकमेकींस मिळत नाहींत त्यांस **समांतर सरळरेघा** असें म्हणतात.

३५ दोन समांतर सरळ रेघांस छेदणारी किंवा त्यांवर पडणारी जी रेघ तिला **छेदकरेषा** असें म्हणतात. जसें, ई फ ही छेदक रेषा आहे.



३६ छेदकरेषेनें समांतर रेघांच्या जोडामध्यें जे कोन होतात, त्यांस **अंतर्कोन** म्हणतात, व समांतर रेघांच्या जोडाच्या बाहेर जे कोन होतात त्यांस **बाह्यकोन** म्हणतात. जसें, अ ग ह, ब ग ह, क ह ग आणि ग ह ड हे अंतर्कोन, आणि अ ग ई, ब ग ई, क ह फ आणि ड ह फ हे बाह्यकोन,



३७ छेदकरेषेच्या भिन्न अंगांस असून समोरासमोर असणारे जे कोन त्यांस **व्युत्क्रमकोन** म्हणतात. त्यांत समांतर रेघांच्या जोडाच्यामध्यें जे असतात ते **अंतर्व्युत्क्रमकोन**, आणि बाहेर असतात ते **बाह्यव्युत्क्रमकोन**. जसें, (वरील आकृतींत) अ ग-ह आणि ड ह ग किंवा ब ग ह आणि क ह ग हे

अंतर्व्युत्क्रमकोन, आणि **ई ग ब** आणि **क ह फ** किंवा **अ ग ई** आणि **ड ह फ** हे **बाह्यव्युत्क्रमकोन**.

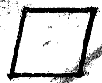
३८ कोणत्याही आकृतीचे सर्वकोण सम असल्यास तीस **समकोणाकृति** म्हणतात, आणि ज्या आकृतीच्या सर्वबाजू सारख्या असतात तीस **समभुजाकृति** असें म्हणतात.

३९ एका आकृतीचे कोन दुसऱ्या आकृतीचे कोनाबरोबर क्रमानें असल्यास त्या दोन्ही आकृतीस **समकोण आकृति** असें म्हणतात. ज्या आकृतींच्या बाजू अनुक्रमानें सारख्या असतात त्यांस **समभुज आकृति** असें म्हणतात.

४० ज्या चौकोनाच्या चारीबाजू सारख्या असून चारीकोन काटकोन असतात त्यास **चौरस** असें म्हणतात.

४१ ज्या चौकोनाचे चारीकोन काटकोन असतात, परंतु सर्वबाजू सारख्या नसतात त्यास **काटकोनचौकोन** असें म्हणतात.

४२ ज्या चौकोनाच्या सर्वबाजू सारख्या असतात, पण कोन काटकोन नसतात त्यास

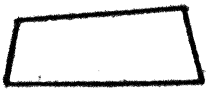


समभुज समांतरचौकोन (राम्बस) असें म्हणतात.

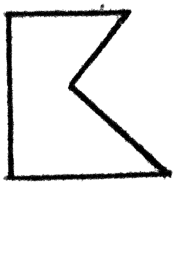
४३ ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू समांतर असतात त्यास **समांतरभुज** (समांतरबाजू) चौकोन असें म्हणतात.

४४ ज्या चौकोनाच्या दोन बाजू मात्र समांतर असतात त्यास **ट्रापिजेद** असें म्हणतात.

४५ वर सांगितलेल्या आकृतीं शिवाय जितक्या चार बाजूंच्या आकृति आहेत त्यांस **ट्रापिज्यम्** म्हणतात.



४६ कोणत्याही सरलरेषाकृतींत दोन काटकोनांहून जो कोन कमी असतो त्यास **सेलिअंट** असें म्हणतात, आणि दोन काटकोनांहून जो अधिक असतो त्यास **रीएंट्रंट** असें म्हणतात.



४७ सरलरेषाकृतीच्या कोणत्याही बाजूस पाया म्हटलें असतां चिंता नाहीं. काटकोन त्रिकोणांत काटकोना समोरचे बाजूस **कर्ण** म्हणतात, आणि राहिलेल्या

दोन बाजूंपैकीं एकीस **भुज** किंवा **लंब** आणि दुसरीस **कोटी** असें म्हणतात. समद्विभुज त्रिकोणांत समान बाजू खेरीज जी तिसरी बाजू असते तीस **पाया** असें म्हणतात. कोणत्याही त्रिकोणाच्या पाया समोरील कोणबिंदूस **शिर** असें म्हणतात, आणि कोनास **शिरकोन** असें म्हणतात.

४८ त्रिकोण किंवा समांतरभुजचौकोन ह्यांची उंची म्हटली म्हणजे पायावर समोरील कोणबिंदूपासून किंवा बाजूपासून काढलेला जो लंब तो समजावा.

४९ चौकोनांत समोरासमोरच्या कोनांचे बिंदूस सांधणाऱ्या ज्या रेषा त्यांस **कर्णरेषा** असें म्हणतात.

प्रत्यक्षप्रमाणें.

१ एकाच पदार्थाशीं बरोबर असणारे जे अनेक पदार्थ ते परस्पर बरोबर असतात.

२ समपदार्थांत समपदार्थ मिळविले असतां त्यांच्या बेरजा सम होतात.

३ समपदार्थांत समपदार्थ वजा केले असतां त्यांच्या बाक्या सम राहातात.

४ विषमपदार्थांत समपदार्थ मिळविले असतां बेरजा विषम होतात.

५ विषमपदार्थांतून समपदार्थ वजा केले असतां त्यांच्या बाक्या विषम राहातात.

६ जे पदार्थ दुसऱ्या एका पदार्थाच्या दुप्पट असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

७ जे पदार्थ दुसऱ्या एका पदार्थाच्या अर्धाबरोबर असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

८ ज्या आकृति परस्परांशीं मिळतात म्हणजे एकच जागा व्यापून राहातात त्या परस्पर बरोबर असतात.

९ सगळा पदार्थ आपल्या अंशापेक्षां मोठा असतो.

१० सर्वकाटकोन परस्पर बरोबर असतात.

११ एकेच बिंदूतून एकेच रेषेशीं दोन समांतर रेषा काढल्या असतां त्या परस्परांशीं मिळतील, म्हणजे एकेच ठिकाणीं पडतील निराळ्या राहाणार नाहींत.

१२ कोणत्याही एका आकृतीशीं सर्वांशीं सारखी अशी दुसरी आकृति असणें शक्य आहे.

सरलरेखागणितांतील मुख्यमुख्य शब्दांचीं लक्षणें.

१ सिद्ध झालेली जी गोष्ट तीस सिद्धांत म्हणावें. प्रमेय (थियरम) कृत्य (प्राब्लेम) आणि साधकसिद्धांत (लेमा) असे सिद्धांताचे तीन प्रकार आहेत.

२ ज्या सिद्धांतामध्यें केवळ सिद्धताच करावयाची असते त्यास **प्रमेय** म्हणावें.

३ ज्या सिद्धांतामध्यें कांहीं कृति करावयाची असते त्यास **कृत्य** म्हणावें.

४ अन्यसिद्धांताच्या सिद्धतेस जो सिद्धांत साधन होतो त्यास **साधक सिद्धांत** म्हणावें.

५ सिद्धांताच्या प्रतिज्ञेंत किंवा उपपादनांत जी गोष्ट प्रमाणावांचून खरी मानलेली असते तीस **सिद्धवद्गृहीत गोष्ट** असें म्हणावें.

६ एक किंवा अनेक सिद्धांतांपासून जें अनुमान होतें त्यास **कुरलरी** म्हणावें.

७ एक किंवा अनेक सिद्धांत ह्यांची योजना, संबंध, मर्यादा, व्याप्ति अथवा तत्संबंधी कांहीं विशेष दाखविण्या करितां जें कांहीं लिहिलें असतें त्यास **टीप** (स्कोलियम) म्हणावें.

८ सिद्धांताचें जें कथन त्यास **प्रतिज्ञा** म्हणावें.

९ प्रतिज्ञेंत सांगितलेल्या गोष्टीचें जें उपपादन त्यास **सिद्धता** म्हणावें. सिद्धता **क्रमिक** आणि **क्रमविरुद्ध** अशी दोन प्रकारची आहे.

१० ज्या सिद्धतेंत सांगितलेली गोष्ट सिद्ध केली असते ती **क्रमिक.**

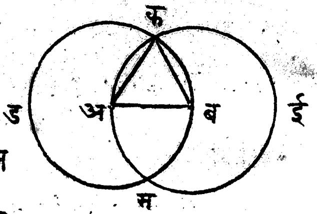
११ ज्या सिद्धतेंत सांगितलेल्या गोष्टीची उलट संभवत नाहीं असें दाखविलें असतें ती **क्रमविरुद्ध.**

१२ सांगितलेल्या नियमां प्रमाणें रेषा किंवा बिंदु घेणें ह्यास **कृति** म्हणावें.

१३ ज्या गोष्टी अथवा जे संबंध सांगितले असतात आणि ज्यांपासून नव्या गोष्टी व नवे संबंध सिद्ध करावया चे असतात त्यांस **डेटा** म्हणावें.

१ सिद्धांत.

कोणत्याही समर्याद सरळ रेषेवर समभुज त्रिकोण काढावयाचा.



अब एक समर्याद सरळ रेष आहे, तीवर म्हणजे तीपायाधरून समभुज त्रिकोण काढावयाचा आहे.

अ मध्य कल्पून अब त्रिज्येनें बकड वर्तुळ काढ, आणि ब मध्य कल्पून बअ त्रिज्येनें अकई वर्तुळ काढ. हीं वर्तुळें ज्या बिंदूंत परस्परांस छेदतात त्यांतील एका बिंदूस क अशी संज्ञा दे. नंतर अ,क आणि क,ब सांध. आतां अबक हा समभुज त्रिकोण झाला.

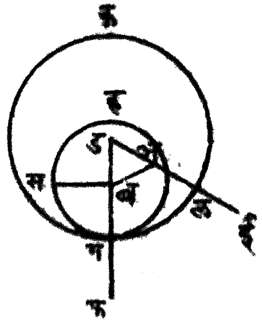
कारण, अ हा बसडक वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्याकरितां अब आणि अक ह्या रेषा (१७ व्या व्याख्येवरून) परस्पर बरोबर आहेत; व ब हा अकई वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्याकरितां बअ, बक बरोबर आहे, म्हणून अब रेषा अक आणि बक ह्या प्रत्येक रेषेशीं बरोबर आहे, म्हणून (१ प्रत्यक्ष प्रमाणावरून) अक, बक बरोबर आहे. तेव्हां अक, अब, आणि बक ह्या रेषा परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून अबक

त्रिकोण समभुज आहे व तो अब रेघेवर काढला आहे.

२ सिद्धांत.

सांगितलेल्या बिंदूपासून सांगितलेल्या रेघे एवढी रेघ काढावयाची.

अ एक बिंदु आहे. व बस एक रेघ आहे, त्यास अ बिंदूपासून बस एवढी रेघ काढावयाची आहे. अ आणि ब हे बिंदु सांध, अब रेघेवर (१ ल्या सि० म०) अबड समभुज त्रिकोण



कर, ड ब आणि ड अ ह्या रेघा फ आणि ई ह्या बिंदूपर्यंत वाढीव, ब मध्य करून बस त्रिज्येनें स ग ह वर्तुळ काढ, व ड मध्य करून ड ग त्रिज्येनें ग ल क वर्तुळ काढ.

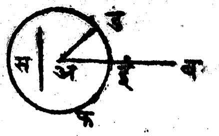
अल रेघ बस बरोबर आहे. कारण ब बिंदु स ग ह वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्याकरितां (१७ व्या व्या० म०) ब स रेघ ब ग बरोबर आहे. ड बिंदु ग ल क वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्याकरितां ड ग रेघ ड ल बरोबर आहे. ड ग आणि ड ल ह्या रेघांचे ड ब आणि ड अ हे भाग परस्परांशीं बरोबर आहेत,

ह्या करितां हे त्या रेघांतून वजा केले असतां (३ ऱ्या प्र त्यक्ष प्रमाणाप्रमाणें) बाकीचे भाग **बग** आणि **अल** हे परस्पर बरोबर होतील. पण **बग** **बस** बरोबर आहे असें पूर्वी सांगितलें आहे, ह्या करितां **बस** आणि **अल** ह्या रेघा प्रत्येक **बग**शीं बरोबर आहेत, ज्या दोन वस्तु दुसऱ्या एका वस्तूशीं बरोबर असतात त्या परस्पर बरोबर असतात, म्हणून **अल** रेघ **बस** रेघे बरोबर आहे.

३ सिद्धांत.

विवक्षित दोन विषम रेघांपैकीं मोठ्या रेघेचा लहान रेघे एवढा तुकडा पाडावयाचा.

अब आणि **स** ह्या दोन विषम रेघा आहेत, त्यां मध्यें **अब** ही रेघ **स** रेघे पेक्षां मोठी आहे, त्यास **स** रेघे एवढा **अब** रेघेचा तुकडा पाडावयाचा आहे.

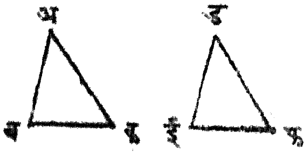


अ बिंदूपासून **स** रेघे एवढी (२ ऱ्या सि० प्र०) **अड** रेघ काढ, आणि **अ** मध्य धरून **अड** त्रिज्येनें **डईफ** वर्तुळ काढ. **अ** बिंदु **डईफ** वर्तुळाचा मध्य

आहे, ह्याकरितां अई रेघ अड रेघेबरोबर आहे. पण अड रेघ स रेघेबरोबर केली आहे, ह्याकरितां (१ प्रत्यक्ष प्र० व०) अई रेघ स रेघेबरोबर आहे. तेव्हां अब मोठ्या रेघेचा अई तुकडा स लहान रेघे एवढा पडला आहे, हें सिद्ध.

४ सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन हीं दुसऱ्याच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन ह्यांशीं अनुक्रमे बरोबर असतात ते दोन त्रिकोण पर-



स्पर सर्वांशीं सारखे असतात, म्हणजे एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्याच्या तिसरे बाजूबरोबर असते, व एकाचे इतर कोन दुसऱ्याच्या इतर कोनांबरोबर असतात, ते असे, कीं ज्या बाजू बरोबर असतात त्यां समोरील कोन परस्पर बरोबर असतात.

अबक आणि डईफ असे दोन त्रिकोण आहेत, अबक, त्रिकोणाच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजू डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि डफ ह्या दोन बाजूंशीं

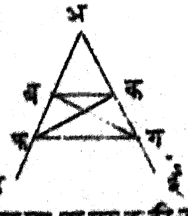
अनुक्रमें बरोबर आहेत, आणि अब आणि अक ह्या दोन बाजूंच्या मधील बअक कोन डई आणि डफ ह्या दोन बाजूंच्या मधील ईडफ कोनाबरोबर आहे, त्यास हे दोन त्रिकोण सर्वांशी सारखे आहेत, म्हणजे बअक त्रिकोणाची तिसरी बाजू बक ही ईडफ त्रिकोणाच्या तिसऱ्या ईफ बाजूशीं बरोबर आहे, आणि बअ बाजू समोरील क कोन बअच्या बरोबरीची जी डई बाजू तिच्या समोरील फ कोनाबरोबर आहे, व अक बाजू समोरील ब कोन डफ बाजू समोरील ई कोनाबरोबर आहे.

जर अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर असा ठेविला, कीं अ बिंदु ड बिंदूवर पडेल, आणि अब रेघ डई रेघेवर पडेल, तर ब बिंदु ई बिंदूवरच पडेल, कारण अब रेघ डई रेघे बरोबर आहे. अब रेघ डई रेघेशीं मिळून गेली आहे, ह्या करितां अक रेघ डफशीं मिळून जाईल, कारण बअक कोन ईडफ कोनाबरोबर आहे, आणि क बिंदु फशीं मिळून जाईल, कारण अक बाजू डफ बाजू बरोबर आहे, आतां ब बिंदु ई बिंदूवर पडला आहे, व क बिंदु फ वर पडला आहे, ह्या करितां (३ऱ्या व्या० कु० न०) बक बाजू ईफ बाजूवर पडेल, व तिशीं बरोबर होईल. ह्यावरून स्पष्ट दिसतें, कीं,

अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर बरोबर पडेल. ह्याकरितां अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बरोबर आहे, व त्यांचे बाकीचे कोनही परस्पर बरोबर आहेत, म्हणजे अब बाजूचे समोरील क कोन अबचेबरोबरीची जी ईड बाजू तिच्या समोरील फ कोना बरोबर आहे, व अक बाजूचे समोरील ब कोन अकचे बरोबरीची जी डफ बाजू तिचे समोरील ई कोना बरोबर आहे.

५ सिद्धांत.

समद्विभुज त्रिकोणांत पायाकडील कोन बरोबर असतात, व समभुज वाढविले असतां पायाच्या बाहेरले अंगास जे कोन पडतात तेही परस्पर बरोबर होतात.



अबक एक समद्विभुज त्रिकोण आहे, त्याच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजू परस्पर बरोबर आहेत, व ह्या बाजू ड आणि ई ह्या बिंदूपर्यंत अनुक्रमें वाढविल्या आहेत, त्यास बक पायाकडील अबक आणि अकब हे कोन परस्पर बरोबर आहेत, व पायाचे बाहेरचे अंगचे कोन डबक आणि ईकब हेही परस्पर बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अड रेषेंत एक फ बिंदु घे, आणि (३ऱ्या सि० प्र०) मोठी जी अई रेघ हिचा लहान जी अफ रेघ हिच्या एवढा अग तुकडा पाड, आणि फ,क आणि ब,ग सांध.

अफक आणि अगब ह्या दोन त्रिकोणांत अफ बाजू अग बाजू बरोबर आहे, व अब बाजू अक बाजू बरोबर आहे, व अ कोन दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, व बरोबर ज्या बाजू आहेत त्यांचे आंत सांपडला आहे, ह्या करितां (४थ्या सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून फक बाजू बग बाजू बरोबर आहे, अकफ कोन अबग कोना बरोबर आहे, व अफक कोन अगब कोना बरोबर आहे. अफ बाजू अग बाजू बरोबर आहे, व अब तुकडा अक तुकड्या बरोबर आहे; ह्या करितां (३ प्र० प्र०) फब तुकडा गक तुकड्या बरोबर आहे, आतां वर सिद्ध केलें कीं कफ बाजू बग बाजू बरोबर आहे, व फ कोन ग कोना बरोबर आहे, तेव्हां बफक त्रिकोणाच्या फक आणि फब ह्या दोन बाजू व फ अंतर कोन बगक त्रिकोणाच्या गब आणि गक ह्या दोन बाजू व ग अंतर कोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, ह्या करितां हे दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून (४थ्या सि० प्र०) फक समोरील ब कोन फक-च्या बरोबरीची जी बग बाजू हिच्या समोरील क कोना बरोबर

आहे, व फकब कोन गबक कोना बरोबर आहे. पण अबग कोन अकफ कोना बरोबर आहे, असे पूर्वी सिद्ध केलें आहे, आणि आतां सिद्ध केलें, कीं गबक कोन फकब कोना बरोबर आहे, ह्यास्तव पायाकडील अबक आणि अकब हे कोन बरोबर आहेत, हें स्पष्ट आहे, आणि पायाच्या बाहेरच्या अंगचे कोन फबक आणि गकब हे परस्पर बरोबर आहेत, हें वर सिद्ध केलेंच आहे.

कु॰ समभुज त्रिकोण समकोण असतात, हें वरच्या सिद्धतेवरून स्पष्ट आहे.

टी॰ पायाला छेदणाऱ्या रेषेनें अ शिरकोनाचे समान दोन भाग केले असतां हा सिद्धांत स्वल्परीतीनें सिद्ध होतो, कारण असें केलें असतां अबक त्रिकोणांत दोन त्रिकोण पडतात, आणि ते (४थ्या सि॰ प्र॰) बरोबर होतात. तेव्हां पायाकडील कोन बरोबर आहेत, हें अर्थातच सिद्ध होतें. १२ वा सि॰ सिद्ध झाल्यावर पायाच्या बाहेरच्या अंगचे कोन परस्पर बरोबर असतात, हें सहज दाखवितां येईल; आतां कोनाचे दोन समान भाग कसे करावे, हें नववा सिद्धांत सिद्ध होण्याचे पूर्वी माहीत होणार नाहीं खरें, पण ह्या सिद्धांताचे सिद्धतेस कांहीं बाध येत नाहीं, कारण कोणती तरी रेघ शिरकोनाचे दोन भाग समान

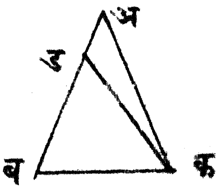
करील हें स्पष्ट आहे.

ज्याचा शिरकोन व समबाजू अबक समद्विभुज त्रिकोणाचा शिरकोन व समबाजू ह्यांशीं बरोबर आहेत, असा एक समद्विभुज त्रिकोण कल्पिला असतां हा सिद्धांत स्वल्परीतीनें सिद्ध होतो. ४ थ्या सिद्धांतांतील अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण ह्या तऱ्हेचे आहेत असें कल्पूं. अबक त्रिकोणाचा ब कोन डईफ त्रिकोणाच्या ई कोना बरोबर आहे हें सिद्ध आहे. परंतु ह्या दोन समद्विभुज त्रिकोणांत अक आणि अब ह्या दोन बाजू अनुक्रमें ईड आणि डफ ह्या दोन बाजू बरोबर आहेत, आणि अ कोन ड कोना बरोबर आहे, त्यास (४ थ्या सि॰ प्र॰) क कोन ई कोना बरोबर आहे. आतां ब आणि क हे कोन प्रत्येक ई कोना बरोबर आहेत, ह्याकरितां ब आणि क हे परस्पर (१ प्र॰ प्र॰) बरोबर आहेत.

६ सिद्धांत.

त्रिकोणांत दोन कोन बरोबर असले तर त्यांच्या समोरील बाजूही बरोबर असतात.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याचे ब आणि क हे कोन परस्पर बरोबर आहेत, त्यास ब कोना समोरील



अक बाजू ही क कोनासमोरील अब बाजू बरोबर आहे.

अब आणि अक ह्या दोन रेघा परस्परांशीं बरोबर नाहींत असें मानल्यास त्या दोहों पैकीं एक दुसरीपेक्षां मोठी आहे असें मानिलें पाहिजे: म्हणून अब बाजू अक बाजूपेक्षां मोठी आहे असें मान, आणि अब मोठ्या बाजूचा अक लहान बाजू एवढा (३ ऱ्या सि० प्र०) बड तुकडा पाड; आणि डक सांध. बडक आणि अबक ह्या दोन त्रिकोणांत बड बाजू अक बाजू बरोबर आहे, बक बाजू दोन्हीं त्रिकोणांस साधारण आहे, व ब अंतर कोन क अंतर कोना बरोबर आहे, ह्याकरितां (४ थ्या सि० प्र०) डबक त्रिकोण अबक त्रिकोणा बरोबर आहे. पण लहान पदार्थ मोठ्या पदार्था बरोबर होणें अशक्य आहे, ह्याकरितां अब बाजू अक बाजूशीं असमान नाहीं, तर समानच आहे.

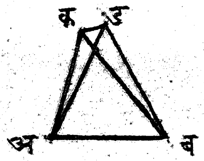
कु० समकोण त्रिकोण समभुज असतात.

७ सिद्धांत.

एकापायावर आणि त्याचे एकेच अंगास, ज्या दोन

त्रिकोणांच्या एके अंगच्या बाजू पायाच्या एके टोंकांत समाप्त होऊन बरोबर असतील, तसेंच दुसऱ्या अंगच्या बाजू पायाच्या दुसऱ्या टोंकांत समाप्त होऊन बरोबर असतील, असे दोन त्रिकोण कदापि होणार नाहींत.

असे दोन त्रिकोण एका पायावर आणि त्याचे एकेच अंगास होतील असें वाक्य मानल्यास, अब पायावर त्याचे एकेच अंगास अबक आणि अबड हे दोन त्रिकोण आहेत, आणि यांच्या एका अंगच्या बाजू अक आणि अड

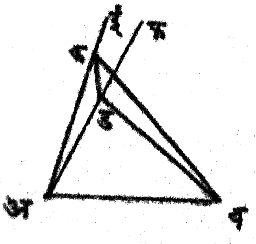


ह्या अ बिंदूंत समाप्त होतात, व बरोबर आहेत, व दुसऱ्या अंगच्या बाजू बक आणि बड ह्या ब बिंदूमध्यें समाप्त होतात, व परस्पर बरोबर आहेत, असें मानिलें.

अबक आणि अबड ह्या दोन त्रिकोणांच्या स्थितीचा तीन प्रकारचा संभव आहे. एक प्रकार असा कीं, दोन्ही त्रिकोणांपैकीं एकाचाही शिरबिंदु दुसऱ्या त्रिकोणामध्यें असणार नाहीं; दुसरा प्रकार असा कीं, एकाचा शिरबिंदु दुसऱ्यामध्यें पडेल; आणि तिसरा प्रकार असा कीं, एकाचा शिरबिंदु दुसऱ्याच्या बाजूवर पडेल.

प्रथमतः पहिल्या प्रकाराविषयीं विचार करूं. कड सांधली; अक बाजू अड बरोबर आहे. त्याकरितां (५. व्या सि० प्र०) अकड कोन अडक कोना बरोबर आहे; अकड कोन बकड कोनापेक्षां मोठा आहे, त्याकरितां अकड कोनाचे बरोबरीचा जो अडक कोन हा ही बकड कोनापेक्षां मोठा आहे; पण बडक कोन तर बकड कोनापेक्षां फारच मोठा आहे, कारण अडक कोन बडक कोनाचा तुकडा आहे. बड बाजू बक बाजू बरोबर आहे, त्याकरितां बकड कोन बडक कोना बरोबर आहे; पण आतांच सिद्ध केलें, कीं बडक कोन बकड पेक्षां फारच मोठा आहे, त्यास अबक आणि अडक ह्या दोन त्रिकोणांची पहिल्या प्रकारची स्थिति अशक्य होय.

आतां दुसऱ्या प्रकारच्या स्थितीविषयीं विचार करूं. अबड त्रिकोणाचा शिरबिंदु ड, अबक त्रिकोणाचे आंत पडला आहे.

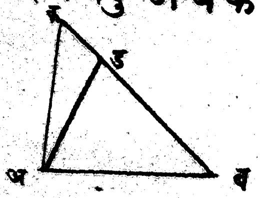


क आणि ड हे बिंदु प्रथमतःच सांधिले आहेत; अक आणि अड ह्या दोन बाजू ई आ-

णि फ ह्या बिंदूपर्यंत अनुक्रमें वाढविल्या. अ क ड त्रि-कोणांत अक बाजू अड बाजू बरोबर आहे, ह्मणून (५व्या सि॰ प्र॰) कड पायाच्या बाहेरच्या अंगचे कोन फडक आणि ईकड हे परस्पर बरोबर आहेत; पण ई कड कोन ब कड कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या करितां ईकड कोना बरोबरीचा जो कोन कडफ हाही बकड कोनापेक्षां मोठा आहे, बडक कोन तर ब कड कोनापेक्षां फारच मोठा आहे, कारण कडफ कोन बडक कोनाचा तुकडा आहे. बकड त्रिकोणां-त बक बाजू बड बाजू बरोबर आहे, ह्या करितां ब-कड कोन बडक कोना बरोबर आहे: पण तुकतेंच सिद्ध केलें, कीं बकड कोन बडक कोनापेक्षां फारच मोठा आहे, ह्यास्तव अबड आणि अकब ह्या दोन त्रिकोणांची ही स्थितिही अशक्य आहे.

तिसऱ्या प्रकाराविषयीं विचार.

अ ब ड त्रिकोणाचा ड शिरबिंदु अ ब क त्रिकोणाच्या बक बाजूवर पडला आहे. पण अबक आणि अबड ह्या दोन त्रि-कोणांच्या ह्या प्रकारच्या

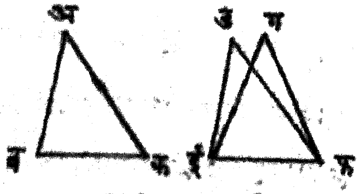


स्थितीची अशक्यता आकृति मनांत आणतांच दिसून येते, ती शब्दविन्यास सिद्धतेची गरज नाहीं.

८ सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांत एकाच्या तीन बाजू दुसऱ्याच्या तीन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर असतात ते दोन त्रिकोण परस्पर सर्वांशीं बरोबर असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण आहेत. अबक त्रिकोणाच्या अब, अक आणि बक ह्या बाजू डईफ त्रिकोणाच्या डई, डफ आणि ईफ ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत. त्यास हे दोन त्रिकोण एकरूप हें सिद्ध करावयाचें.



मनांत आण, कीं अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर असा ठेविला, कीं ब बिंदु ई बिंदूवर पडेल, आणि बक बाजू ईफ बाजूवर पडेल. आतां क बिंदु फ बिंदूवरच पडेल, कारण बक बाजू ईफ बाजू बरोबर आहे. बक बाजू ईफ बाजूवर पडली असतां अब आणि अक ह्या डई आणि डफ ह्यांवरच पडतील. अब आणि अक ह्या दोन बाजू डई आणि डफ ह्यांवर पडणार

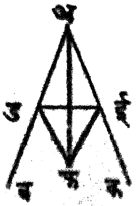
नाहींत असें मानल्यास या दुसऱ्या तऱ्हेनें पडल्या पाहि-
जेत. त्या ईग आणि गफ रेघा ज्या स्थळीं आहेत त्या स्थळीं
पडतील असें मानूं. आतां ईफ पायावर आणि त्याचे
एकेच अंगास ज्या डई आणि गई बाजू बरोबर अ-
सून पायाचे ई टोकांत समाप्त होतात, व ज्या डफ आ-
णि गफ बाजू बरोबर असून फ टोकांत समाप्त होतात,
असे दोन त्रिकोण डईफ आणि गईफ राहूं लागतील, प-
ण अशी गोष्ट होणें अशक्य, असें मागीलच सिद्धांतामध्यें
सिद्ध केलें आहे, याकरितां बक पाया ईफ पायाशीं अग-
दीं मिळाला असतां अब आणि अक बाजू डई आणि
डफ या बाजूंवरच पडतील, पडल्यावांचून कदापि राहा-
णार नाहींत. याकरितां अबक त्रिकोणाचे तिन्ही कोन
डईफ त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांवर पडतील, म्हणून ते त्रि-
कोण परस्पर बरोबर आहेत.

९ सिद्धांत.

सरळरेघ कोनाचे दोन भाग समान करावयाचे.

बअक एक सरळरेघ कोन आहे, त्याचे दोन भाग
समान करावयाचे. अब रेघेंत ड बिंदु घे, आणि (३ या
सि॰प्र॰) अकचा अड एवढा अई तुकडा पाड, ड,

ई सांध, ड ई बाजूवर (१ल्या सि॰ प्र॰) डफई समभुज त्रिकोण कर, आणि अफ सांध. अफ रेघ डअई कोनाचे दोन समान भाग करिते.

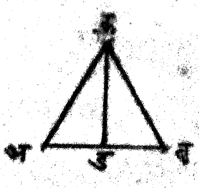


कारण, अडफ आणि अईफ ह्या दोन त्रिकोणांत अड बाजू अई बाजू बरोबर आहे, अफ रेघ दोहोंस साधारण आहे, आणि डफ बाजू ईफ बाजू बरोबर आहे, त्याकरितां ते त्रिकोण (८व्या सि॰ प्र॰) एकरूप आहेत. म्हणून डअफ कोन ईअफ कोना बरोबर आहे.

१० सिद्धांत

कोणत्याही सरळ रेघेचे समान दोन भाग करावयाचे.

अब एक सरळ रेघ आहे, तिचे समान दोन भाग करावयाचे. (१ल्या सि॰ प्र॰) अब बाजूवर अबक समभुज त्रिकोण कर, आणि (९व्या सि॰ प्र॰) अकब कोनाचे कड रेघेनें दोन समान भाग कर.



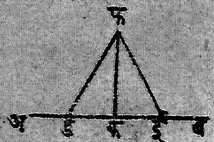
कड रेघ अब रेघेचे अड आणि बड हे दोन भाग समान करते.

अकड आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांत अक बाजू बक बाजू बरोबर आहे, कड बाजू दोहोंस साधारण आहे, आणि अकड कोन बकड कोना बरोबर आहे, ह्या करितां हे दोन त्रिकोण (४ थ्या सि० प्र०) एकरूप आहेत, म्हणून अड बाजू बड बाजू बरोबर आहे.

११ सिद्धांत.

कोणत्याही सरळ रेघेवर त्या रेघेंतील कोणत्याही बिंदूपासून लंब काढावयाचा.

अब एक सरळ रेघ आहे. तीवर तिच्या मधील क बिंदूपासून लंब काढावयाचा आहे.



अक रेघेमध्यें ड बिंदु घे, आणि कड एवढा बक च्या (३ ऱ्या सि० प्र०) कई तुकडा पाड, आणि (१ ल्या सि० प्र०) डई रेघेवर डफई समभुज त्रिकोण कर, आणि क, फ बिंदु सांध. कफ रेघ अब बाजूवर लंब आहे.

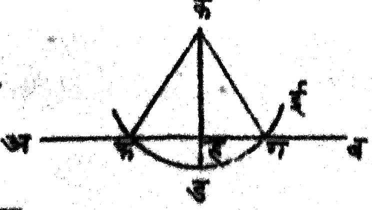
कारण, फडक आणि फईक ह्या दोन त्रिकोणांत

फड बाजू फई बाजू बरोबर आहे, फक रेघ दोहोंस साधारण आहे, आणि डक बाजू कई बाजू बरोबर आहे. ह्याकरितां (८ व्या सि० प्र०) फकड कोन फकई कोना बरोबर आहे. म्हणून (११ व्या व्या०) डकफ आणि फकई हे दोन कोन प्रत्येकीं काटकोन आहेत. ह्याकरितां फक रेघ लंब आहे.

१२ सिद्धांत.

कोणत्याही अमर्याद रेघेवर तिच्या बाहेरील कोणत्याही बिंदूपासून लंब काढावयाचा.

अब एक अमर्याद रेघ आहे, तिचे बाहेर क एक बिंदु आहे. त्यास त्या बिंदूपासून अब रेघेवर लंब काढावयाचा.



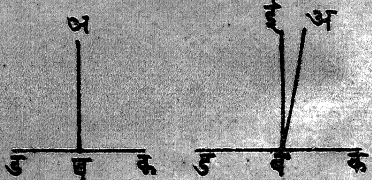
अब बाजूच्या दुसऱ्या अंगास एक ड बिंदु घे, आणि क मध्य कल्पून कड त्रिज्येनें फगई वर्तुळ काढ, (१० व्या सि० प्र०) फग रेघेचे ह स्थळीं दोन समान भाग कर, आणि क, ह सांध. फ,क व क,ग बिंदु सांध. कह रेघ अब रेघेवर लंब आहे.

कारण, फहक आणि गहक त्या दोन त्रिकोणांत फह बाजू हग बाजू बरोबर आहे, कह रेघ दोहोंससाधारण आहे, आणि कफ बाजू कग बाजू बरोबर आहे, कारण त्या त्रिज्या आहेत, म्हणून (८ व्या सि॰ प्र॰) फहक कोन कहग कोना बरोबर आहे. ह्यास्तव (११ व्या व्या॰) ते कोन काटकोन आहेत. ह्या करितां कह रेघ लंब आहे.

१२ सिद्धांत.

एक सरळ रेघ दुसऱ्या सरळ रेघेस येऊन मिळाली असतां जे तिच्या एके अंगास दोन कोन होतात, ते प्रत्येक काटकोन असतात, किंवा ते दोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर होतात.

अब रेघ डक रेघेस मिळून तिचे एके अंगास अबड आणि अबक हे दोन कोन करिते, त्यास त्या कोनां पैकीं प्रत्येक कोन काटकोन असेल, किंवा ते दोन्ही मिळून दोन काटकोनां बरोबर असतील.



अबड आणि अबक हे दोन कोन परस्पर बरो-

वर असल्यास (११ व्या स्प० प्र०) त्यांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोन आहे, परंतु अबड कोन अबक कोना बरोबर नसल्यास, ब बिंदूंतून कड रेषेवर (११ व्या सि० प्र०) बई लंब कर. आतां ईबड आणि ईबक हे दोन कोन काटकोन आहेत; कबई कोन अबक आणि अबई ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेल्यांत डबई कोन मिळिवला, तेव्हां (२ या प्र० प्र०) कबई कोन आणि ईबड कोन मिळून अबक, अबई आणि ईबड ह्या तीन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहेत. डबअ कोन डबई आणि ईबअ ह्या कोनां बरोबर आहे. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेल्यांत अबक कोन मिळीव. (व्या प्र० प्र०) अबड आणि अबक हे दोन कोन मिळून डबई, ईबअ आणि अबक ह्या तीन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहेत. हे तीन कोन कबई आणि ईबड ह्या दोन काटकोनां बरोबर आहेत, असें म गेल्व सिद्ध केलें आहे. ह्याकरितां (१ व्या प्र० प्र०) अबड आणि अबक हे दोन कोन डबई आणि ईबक ह्या दोन काटकोनां बरोबर आहेत.

दुसरीरीत. डबई, ईबअ आणि अबक ह्या तीन कोनांस अनुक्रमें म, न, क्ष अशीं नांवे ठेऊं. आतां डबअ कोन, मन, होईल, आणि ईबक कोन, नक्ष, होईल, व मन कोन = म + न आणि नक्ष कोन = न + क्ष होईल, म्हणून.

म न + क्ष = म + न + क्ष

म + नक्ष = म + न + क्ष

म + नक्ष आणि मन + क्ष हे कोन म + न + क्ष ह्या तीन कोनां बरोबर आहेत, ह्या करितां ते परस्पर बरोबर आहेत, म्हणजे.

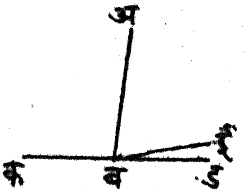
मन + क्ष = म + नक्ष. म, आणि नक्ष हे दोन कोन काट कोन आहेत.

कु० पूरक कोनांच्या दोन जोडांमध्यें एका जोडांतील एक कोन दुसऱ्या जोडांतील एके कोना बरोबर असल्यास बाकी राहिलेले कोन परस्पर बरोबर असतात.

१४ सिद्धांत.

कोणत्याही सरळ रेषेस तिचे एके बिंदूंत दोहों अंगांनीं दोन रेषा येऊन मिळाल्या असतां जे दोन कोन होतात, ते दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर असल्यास त्या दोन रेषा एकाच सरळ रेषेंत असतील.

अब रेषेस ब बिंदूंत बक आणि बड रेषा मिळून त्या अबक आणि अबड असे दोन कोन करितात, आणि ते दोन कोन दोन काटकोनां बरोबर आहेत. त्यास बक आणि बड ह्या दोन रेषा एकाच सरळ रेषेंत आहेत, हे सिद्ध करावयाचें.



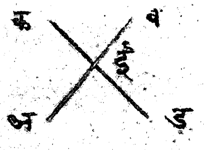
बक रेघ ज्या सरळ रेषेंत आहे त्या सरळ रेषेंत बड रेघ नाहीं, असें मानल्यास बई रेघ त्या सरळ रेषेंत आहे असें मानूं. अब रेघ कबई रेषेस ब बिंदूंत मिळून अबक आणि अबई हे दोन कोन करिते, आणि हे दोन कोन (१३व्या सि० प्र०) दोन काटकोनां बरोबर आहेत. पण अबक आणि अबड हे दोन कोन दोन काटकोनांबरोबर आहेत असें सिद्धवत् गृहीतच आहे, ह्याकरितां अबक आणि अबई हे दोन कोन अबक आणि अबड ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत. अबक हा कोन दोन्ही कोबरींच्या पेक्यांस साधारण आहे, ह्याकरितां हा काढून टाकला असतां (२ऱ्या स्व० प्र०) अबई कोन अबड कोना बरोबर होईल. पण लहान कोन मोठ्या कोनाबरोबर होणें ही गोष्ट अशक्य, ह्याकरितां ज्या सरळ रेषेंत बक रेघ आहे तींत बई रेघ नाहीं. ह्यारीतीनेंच सिद्ध करून

दाखविता येईल, कीं बड रेषे शिवाय दुसरी कोणतीही रेघ बक ज्या रेघेत आहे त्या रेघेंत असणार नाहीं, म्हणून बड आणि बक ह्या रेघा एकाच सरळ रेघेंत आहेत, हें सिद्ध.

१५ सिद्धांत.

दोन रेघांनीं परस्परांस छेदिलें असतां जे कोन पडतात त्यां पैकीं समोरासमोरचे कोन परस्पर बरोबर असतात.

अब आणि कड ह्या दोन रेघा ई स्थळीं छेदितात, त्यास अईड कोन कईब कोना बरोबर आहे व कईअ कोन डईब कोना बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



अई रेघ कड रेघेस ई स्थळीं मिळते, ह्याकरितां (१३ व्या सि॰ न॰) अईक आणि अईड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर आहेत. तसेंच अब रेघेस डई रेघ ई स्थळीं मिळते, ह्याकरितां अईड आणि डईब हे दोन कोन दोन काटकोनां बरोबर आहेत. म्हणून अईक आणि अईड हे दोन कोन अईड आणि डईब ह्या दोन कोनां बरोबर

धारण आहे, ह्या करितां तो त्यांतून काढून टाकिला असतां, (३ ऱ्या अ० प्र०) अ ई क कोन ड ई ब कोना बरोबर होईल. ह्याप्रमाणेंच क ई ब कोन अ ई ड कोना बरोबर आहे, हें सिद्ध होतें.

१ कु० दोन रेषांनीं परस्परांस छेदिलें असतां त्यांच्या छेदन बिंदूजवळ जे चार कोन पडतात ते सर्व मिळून चार काटकोनां बरोबर असतात.

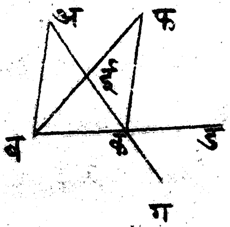
२ कु० एका बिंदूस कितीही रेषा मिळाल्या असतां त्यांच्या योगानें त्या बिंदूसभोंवतीं जे कोन होतात ते सर्व चार काटकोनां बरोबर असतात.

१६ सिद्धांत.

कोणत्याही त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली असतां बाहेर जो कोन होतो तो आंतील पलीकडच्या प्रत्येक कोना पेक्षां मोठा होतो.

अ ब क एक त्रिकोण आहे, त्याची ब क बाजू ड पर्यंत वाढविली आहे. त्यास बाहेरील अ क ड कोन आंतील पलीकडच्या कोनां पेक्षां म्हणजे अ ब क पेक्षां आणि ब अ क पेक्षां मोठा आहे. अ क बाजूने (१०व्या

सि० प्र०) ई स्थळीं दोन समान भाग कर, आणि ब, ई सांध. बई बाजू फ पर्यंत वाढीव, अशी कीं ब



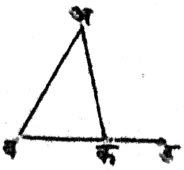
ई आणि ईफ परस्पर बरोबर होतील. फ, क सांध आणि अक, ग पर्यंत वाढीव.

बईअ आणि कईफ ह्या दोन त्रिकोणांत बई बाजू ईफ बाजू बरोबर आहे, अई बाजू ईक बाजू बरोबर आहे, आणि अईब अंतरकोन कईफ अंतर कोना-बरोबर (१५ व्या सि० प्र०) आहे, ह्याकरितां (४ थ्या सि० प्र०) ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप, म्हणून बई बाजू समोरील अ कोन बई बाजूच्या बरोबरीची जी फई बाजू तिच्या समोरच्या फकई कोना बरोबर आहे. अकफ कोनापेक्षां अकड कोन मोठा आहे, ह्याकरितां अकफ चे बरोबरीचा जो बअक कोन ह्यापेक्षांही अकड कोन मोठा आहे. बक बाजूचे दोन समान भाग करून वरल्याप्रमाणें कृत्य केलें असतां अबक कोनापेक्षां बकग कोन किंवा त्याचे बरोबरीचा जो अकड कोन हा मोठा आहे, हें सिद्ध होईल.

39806

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी असते.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याच्या कोणत्याही दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



बक बाजू ड पर्यंत वाढीव. आतां (१६ व्या सि० प्र०) अकड कोन अबक कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या दोन्ही कोनांमध्यें अकब कोन पर्यायानें मिळीव, तेव्हां अकब आणि अकड हे दोन कोन मिळून अबक आणि अकब ह्या दोन कोनांच्या बेरजे पेक्षां मोठे आहेत, परंतु अकब आणि अकड हे दोन कोन मिळून (१३ व्या सि० प्र०) दोन काटकोन आहेत, ह्याकरितां अकब आणि अबक ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे. ह्याप्रमाणेंच अकब आणि कअब ह्या कोनांची बेरीज तशीच अबक आणि बअक यांची ही बेरीज दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे, असें सिद्ध करितां येईल.

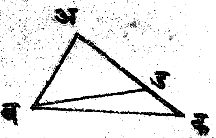
कु० एकाच बिंदूपासून एकाच रेषेवर दोन लंब कदापि होणार नाहींत.

१८ सिद्धांत.

त्रिकोणांत मोठे बाजू समोरील कोन लहान बाजू समोरील कोनापेक्षां मोठा असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे; त्याची अक बाजू अब बाजूपेक्षां मोठी आहे.

त्यास अक बाजू समोरील ब कोन अब बाजू समोरील क कोनापेक्षां मोठा आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



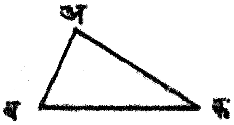
अक बाजू अब बाजूपेक्षां मोठी आहे, म्हणून (३ ऱ्या सि० प्र०) अब एवढा अक च्या अड तुकडा पाड, आणि ब, ड सांध. अडब कोन बकड त्रिकोणाचा बाहेरील कोन आहे, ह्याकरितां तो (१६ व्या सि० प्र०) बकड कोनापेक्षां मोठा आहे. अड बाजू अब बाजू बरोबर आहे, म्हणून (५ व्या सि० प्र०) अडब कोन अबड कोना बरोबर आहे; तेव्हां अबड कोनही बकड कोनापेक्षां मोठा आहे. पण अबड कोन

कोन बकअ कोनापेक्षां फारच मोठा आहे.

१९ सिद्धांत.

त्रिकोणामध्यें महत्तर कोनासमोर महत्तर बाजू असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याचा अबक कोन अकब कोनापेक्षां मोठा आहे. त्यास अक बाजू अब बाजूपेक्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



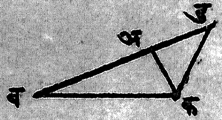
अक, अबपेक्षां मोठी नाहीं, असें म्हटल्यास अक, अब बरोबर आहे, किंवा अबपेक्षां लहान आहे, असें मानिलें पाहिजे. अक, अब बरोबर आहे, असें मानतां येत नाहीं, कारण (५ व्या सि० प्र०) अबक आणि अकब हे दोन कोन बरोबर होऊं लागतील, आणि ते तर बरोबर नाहींत. अक, अबपेक्षां लहान आहे असें ही म्हणतां येत नाहीं, कारण (१८ व्या सि० प्र०) अकब कोन अबकपेक्षां मोठा होऊं लागेल, आणि तो तर अबकपेक्षां लहान आहे. याकरितां अक

बाजू अब बाजूपेक्षां मोठी आहे, हें अर्थातच सिद्ध होतें.

२० सिद्धांत.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असते.

अबक एक त्रिकोण आहे; त्याच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी आहे. म्हणजे अब आणि बक ह्यांची बेरीज अक पेक्षां मोठी आहे, अक आणि अब ह्यांची बेरीज बक पेक्षां मोठी आहे, आणि अक आणि बक ह्यांची बेरीज अब पेक्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



बअ ड पर्यंत वाढीव आणि (३ ऱ्या सि॰ प्र॰) अड, अक बरोबर कर. ड,क सांध.

अड अक बरोबर आहे, ह्या करितां अकड कोन (५ व्या सि॰ प्र॰) अडक कोना बरोबर आहे; परंतु बकड कोन अकड कोनापेक्षां मोठा आहे, म्हणून बकड कोन अकड कोनाच्या बरोबरीचा जो अडक कोन त्यापेक्षांही मोठा आहे. बडक त्रिकोणांत बकड कोन बडक कोनापेक्षां मोठा

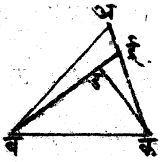
पेक्षां मोठी आहे. पण बड बाजू अब आणि अक ह्या दोन बाजूंचे बेरजे बरोबर आहे, कारण अड बाजू अक बाजू बरोबर आहे, म्हणून अब आणि अक ह्या दोन बाजूंची बेरीज बक पेक्षां मोठी आहे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं अक आणि कब ह्यांची बेरीज अब पेक्षां मोठी आहे, व अब आणि बक ह्यांची बेरीज अक पेक्षां मोठी आहे.

२१ सिद्धांत.

त्रिकोणामध्यें एक बिंदु घेऊन तो आणि त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूच्यां शेवटेंहीं सांधिलीं असतां ज्या दोन रेषा होतात त्यांची बेरीज त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजेपेक्षां कमी असते. पण त्या दोन रेषां मधील कोन त्रिकोणाच्या सदरहु दोन बाजूंमधील कोनापेक्षां मोठा असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्यामध्यें ड एक बिंदु आहे. तो बक बाजूच्यां शेवटेंहीं बड आणि कड ह्या दोन रेषांनीं सांधिलीं आहेत. त्यास बड आणि कड ह्या दोन रेषांची बेरीज अब आणि

अक ह्या दोन बाजूंच्या बे-
रजेपेक्षां मोठी आहे, व ब-
ड आणि कड ह्यांच्या म-
धील कोन बडक हा अब
आणि अक ह्या दोन बाजूंच्या



मधील ब अ क कोनापेक्षां मोठा आहे, हें सिद्ध करावयाचें. बड बाजू ई पर्यंत वाढीव.

(२० व्या सि० प्र०) अबई त्रिकोणाच्या अब आणि अई ह्या दोन बाजूंची बेरीज बई पेक्षां ज्यास्त आहे. ह्या दोन्ही पेक्ष्यांत ईक बाजू मिळीव, तेव्हां अब आणि अई आणि ईक म्हणजे अक ह्यांची बेरीज बई आणि ईक ह्यांच्या बेरजेपेक्षां अधिक आहे.(२० व्या सि० प्र०) डईक त्रिकोणाच्या डई आणि ईक ह्या दोन बाजूंची बेरीज कड बाजूपेक्षां मोठी आहे. बड बाजू दोन्ही पेक्ष्यांत मिळीव. आतां कई आणि बड आणि डई म्हणजे बई ह्यांची बेरीज बड आणि डक ह्यांच्या बेरजेपेक्षां मोठी आहे. नुकतेंच सिद्ध केलें, की अब आणि अक ह्यांची बेरीज बई आणि ईक ह्यांच्या बेरजेपेक्षां मोठी आहे, ह्यास्तव अब आणि अक ह्यांची बेरीज बड आणि डक ह्यांच्या बेरजेपेक्षां फारच मोठी आहे.

बाहेरील बईक कोन अ कोनापेक्षां मोठा आहे, आणि ह्या सिद्धांता प्रमाणेंच डईक त्रिकोणाचा बाहेरील बडक कोन बईक कोनापेक्षां मोठा आहे. तेव्हां बडक कोन बअक कोनापेक्षां मोठा आहे, हें अर्थातच सिद्ध झालें.

२२ सिद्धांत.

एक त्रिकोण करावयाचा आहे, तो असा कीं ज्याच्या तीन बाजू विवक्षित तीन रेषां बरोबर होतील. पण विवक्षित तीन रेषां पैकीं कोणत्याही दोन रेषांची बेरीज तिसऱ्या रेषे पेक्षां मोठी असेल.

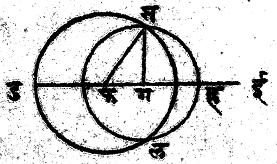
अ, ब, क, तीन रेषा आहेत, आणि ह्या तीन रेषां पैकीं कोणत्याही दोन रेषांची बेरीज तिसऱ्या रेषेपेक्षां मोठी आहे, म्हणजे अ आणि ब ह्यांची बेरीज क पेक्षां मोठी आहे; ब आणि क ह्यांची बेरीज अ पेक्षां मोठी आहे; व अ आणि क ह्यांची बेरीज ब पेक्षां मोठी आहे. त्यास असा एक त्रिकोण करावयाचा आहे, कीं त्याच्या तिन्ही बाजू अ, ब, क, ह्या तीन रेषां बरोबर होतील.

ड ई एक सरळ रेघ काढ. तिचा आरंभ ड बिंदूंत आहे, आणि ती उजवे अंगास म्हणजे ई बिंदूकडे अनंत आहे, असें मान. (३ त्या मि० प्र०) ड ई रेघेचा अ रेघे एवढा ड फ तुकडा पाड, ब रेघे एवढा फ ग तुकडा पाड, आणि क रेघे बरोबर ग ह तुकडा कर, फ मध्य बिंदु कल्पून फ ड त्रिज्येनें ड स ल वर्तुळ काढ, ग मध्य बिंदु कल्पून ग ह त्रिज्येनें ल ह स वर्तुळ काढ, आणि फ, स आणि स, ग सांध. फ स ग त्रिकोणाच्या तीन बाजू अ, ब, क, तीन रेघां बरोबर आहेत.

अ

ब

क

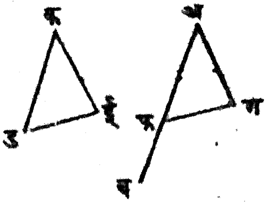


कारण, ड स ल वर्तुळाचा फ मध्यबिंदु आहे, ह्याकरितां (१७ व्या व्या० प्र०) फ ड आणि फ स ह्या रेघा परस्पर बरोबर आहेत, पण फ ड रेघ अ रेघे बरोबर केली आहे, ह्याकरितां फ स रेघ अ रेघे बरोबर आहे. फ ग रेघ ब रेघे बरोबर आहेच. स ह ल वर्तुळाचा ग मध्य आहे, म्हणून ग ह, ग स बरोबर आहे, आणि ग ह, क बरोबर केली आहे, ह्यास्तव ग स ही क बरोबर आहे. म्हणून फ ग स त्रिकोणाच्या फ स फ ग आणि ग स ह्या तीन बाजू

अनुक्रमें अ,ब,क, ह्या तीन रेघांशीं बरोबर आहेत.

२३ सिद्धांत.

विवक्षित रेघेंत विवक्षित बिंदूजवळ विवक्षित कोना एवढा एक कोन करावयाचा.



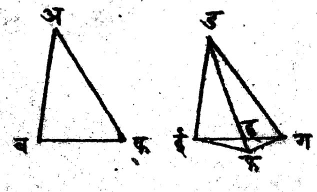
अ ब एक रेघ आहे, तींत अ बिंदूजवळ ड क ई कोना एवढा कोन करावयाचा.

क ड आणि क ई ह्या रेघांत ड आणि ई बिंदु कर, आणि ड,ई सांध. (२२ व्या सि॰ प्र॰) क ड, क ई, आणि ड ई ह्या तीन बाजू बरोबर ज्याच्या बाजू होतील असा एक अ फ ग त्रिकोण कर. आतां अ फ ग त्रिकोणाची अ फ बाजू क ड ई त्रिकोणाच्या क ड बाजू बरोबर आहे, अ ग बाजू क ई बाजू बरोबर आहे, आणि फ ग बाजू ड ई बाजू बरोबर आहे, म्हणून अ फ ग आणि क ड ई त्रिकोण (८ व्या सि॰ प्र॰) एकरूप आहेत, म्हणून फ अ ग कोन ड क ई कोना बरोबर आहे, ह्या करितां अ ब रेघेंत अ बिंदूजवळ ड क ई कोना एवढा फ अ ग कोन झाला असे.

२४ सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंबरोबर असून एक्या त्रिकोणाच्या दोन बाजूंतील कोन त्या बाजूंच्या बरोबरीच्या दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू त्यांतील कोनापेक्षां मोठा असेल, तर ज्या त्रिकोणाचा कोन मोठा आहे, त्याची त्या कोना समोरील बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या लहान कोना समोरील बाजूपेक्षां मोठी होईल.

अबक आणि डईफ असे दोन त्रिकोण आहेत. अबक त्रिकोणाच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजू डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि डफ ह्या दोन बाजूं बरोबर आहेत, पण अब



आणि अक ह्या दोन बाजूंतील बअक कोन डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि डफ ह्या दोन बाजूंतील ईडफ कोनापेक्षां मोठा आहे. त्यास अ कोनासमोरील बक बाजू, ड कोना समोरील ईफ बाजूपेक्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

ड ई आणि ड फ ह्या दोन बाजूंपैकीं कोणती तरी एक बाजू दुसरीपेक्षां मोठी नाहीं असें आहे, त्यास ती बाजू ड ई आहे असें मानूं. ड ई बाजूंत ड बिंदू जवळ (२३ व्या सि॰ प्र॰) ब अ क कोना बरोबर ई ड ग कोन कर, अ क किंवा तिचे बरोबरीची जी बाजू ड फ हिचे बरोबर (३ ऱ्या सि॰ प्र॰) ड ग कर, आणि ई, ग आणि ग, फ बिंदु सांध.

ड ई बाजू ड फ बाजूपेक्षां किंवा तिच्या बरोबरीची जी ड ग बाजू तिच्यापेक्षां मोठी नाहीं, ह्याकरितां ड ग ई कोन ड ई ग कोनापेक्षां मोठा नाहीं. पण ड ह ग कोन (१६ व्या सि॰ प्र॰) ड ई ग कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या करितां ड ह ग कोन ड ग ई कोनापेक्षां मोठा आहे, आणि म्हणूनच ड ग किंवा ड फ बाजू ड ह पेक्षां मोठी आहे, ह्या करितां ई ग बाजू ई फ आणि ई ड ह्या दोहों बाजूंच्या मध्येंच असली पाहिजे, म्हणजे फ बिंदु ई ग बाजूच्या खालीं असला पाहिजे.

अ ब क आणि ड ई ग ह्या दोन त्रिकोणांत अ ब बाजू ड ई बाजू बरोबर आहे, अ क बाजू ड ग बरोबर आहे, आणि ब अ क अंतरकोन ई ड ग अंतर

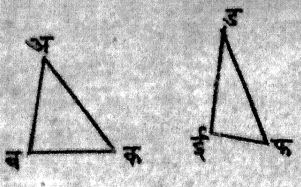
कोना बरोबर आहे, ह्याकरितां (४ थ्या सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, म्हणून ब क बाजू ई ग बाजू बरोबर आहे. ड फ बाजू ड ग बाजू बरोबर आहे, ह्या करितां (५ व्या सि० प्र०) ड फ ग कोन ड ग फ कोना बरोबर आहे. ड ग फ कोन ई ग फ कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्याकरितां ड फ ग कोनही ई ग फ कोनापेक्षां मोठा आहे, आणि ई फ ग कोन तर ई ग फ कोनापेक्षां फारच मोठा आहे, म्हणून (१९ व्या सि० प्र०) ई ग बाजू ई फ बाजूपेक्षां मोठी आहे. आतां ई ग बाजू ब क बाजू बरोबर आहे म्हणून ब क बाजू ई क बाजूपेक्षां मोठी आहे हें सिद्ध.

२५ सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूं बरोबर असून एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्याच्या तिसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असेल तर ज्या त्रिकोणाची तिसरी बाजू मोठी आहे, त्या त्रिकोणाच्या त्या बाजू समोरचा कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजू समोरच्या कोनापेक्षां मोठा होईल.

अ ब क आणि ड ई फ हे दोन त्रिकोण आहेत,

डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि डफ ह्या दोन बाजू बरो-
बर आहेत, पण बक बाजू
ईफ बाजूपेक्षां मोठी आहे,
त्यास बक बाजू समोरील
अ कोन ईफ बाजू समोर-



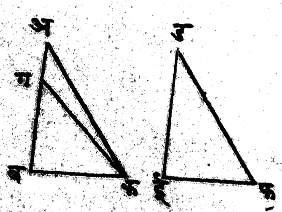
च्या ड कोनापेक्षां मोठा होईल, हें सिद्ध करावयाचें.

बअक कोन ईडफ कोनापेक्षां मोठा नाहीं, असें म्हटल्यास बअक कोन ईडफ कोना बरोबर आहे, किंवा त्यापेक्षां लहान आहे असें मानलें पाहिजे. बअक कोन ईडफ कोना बरोबर म्हणतां येत नाहीं, बरोबर आहे असें म्हटल्यास (४ थ्या सि० प्र०) बक बाजू ईफ बाजू बरोबर होऊं लागेल. बअ-क कोन ईडफ कोनापेक्षां लहान आहे, असेंही म्हण-तां येत नाहीं, कारण, (२३ व्या सि० प्र०) बक ईफ बाजूपेक्षां लहान होऊं लागेल. ह्याकरितां बअ-क कोन ईडफ कोनापेक्षां निःसंशय मोठा आहे.

२६ सिद्धांत.

एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांच्यामधील बाजू किंवा त्यांपैकीं एका कोना समोरील बाजू हीं दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांच्या मधील बाजू किंवा त्यांपैकीं, पहिल्या त्रिकोणांत जो कोन घेतला आहे तदनुरूप कोना समोरील बाजू ह्यांशीं बरोबर असल्यास ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं सारखे असतात.

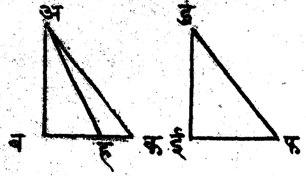
अबक आणि डईफ असे दोन त्रिकोण आहेत. अबक त्रिकोणाचे अबक आणि अकब हे दोन कोन डईफ त्रिकोणाच्या डईफ आणि डफई च्या कोनां बरोबर आहेत, व अबक त्रिकोणाची बक बाजू डईफ त्रिकोणाच्या ईफ बाजू बरोबर आहे. (आतां बरोबरीच्या कोनांच्या मधल्या बक आणि ईफ या बाजू प्रथमतः धरिल्या आहेत.) त्यास अब आणि अक या दोन बाजू डई आणि डफ या दोन बाजूं बरोबर आहेत, व बअक कोन ईडफ कोना बरोबर आहे, हें सिद्ध करायाचें.



अब, डई बरोबर नसल्यास त्यांपैकीं कोणं-
ती तरी एक बाजू दुसऱ्या बाजूपेक्षां मोठी असली पा-
हिजे. अब बाजू डई बाजूपेक्षां मोठी आहे असें मानूं.
बग, डई बरोबर कर, आणि क, ग सांध. गबक
त्रिकोणाच्या गब आणि बक ह्या दोन बाजू आणि ग-
बक अंतरकोन डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि ई-
फ ह्या दोन बाजू व डईफ अंतरकोन ह्यांशीं अनु-
क्रमें बरोबर आहेत, ह्याकरितां (४ थ्या सि० प्र०)
गबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरू-
प, म्हणून गकब कोन डफई कोना बरोबर आहे.
पण अकब कोन डफई कोना बरोबर आहे, असें
गृहीत आहे, ह्या करितां गकब कोन अकब कोना
बरोबर आहे. पण लहान कोन मोठ्या कोना बरोबर हो-
णें हें अशक्य, ह्याकरितां अब, डईशीं असमान आ-
हे असें नाहीं, तर समानच आहे. आतां अबक त्रि-
कोणाच्या अब आणि बक ह्या दोन बाजू व अबक
अंतरकोन डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि ईफ
ह्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील डईफ अंतरकोन
ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, ह्याकरितां (४ थ्या सि०
प्र०) ते दोन त्रिकोण एकरूप म्हणून अक बाजू

ड फ बाजू बरोबर व ब अ क तिसरा कोन ई ड फ तिसऱ्या कोना बरोबर आहे.

आतां क कोना समोरील अ ब बाजू क ऱ्या बरोबरीचा जो फ कोन ह्याच्या समोरील ड ई बाजू बरोबर आहे, असें मानूं. अ क आणि ब क ह्या बाजू व ब अ क कोन, ड फ आणि ई फ ह्या बाजू व ई ड फ कोन ह्यांशीं बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



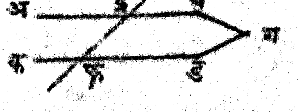
ब क बाजू ई फ बरोबर नसेल, तर ब क, ई फ पेक्षां मोठी आहे असें मानूं. ब ह, ई फ बरोबर कर, आणि अ ह सांध. ब ह अ त्रिकोणाच्या ब ह आणि अ ब ह्या दोन बाजू व अ ब ह अंतर कोन ड ई फ त्रिकोणाच्या ई फ आणि ई ड ह्या दोन बाजू व ड ई फ अंतरकोन ह्यांशीं बरोबर आहेत, ह्याकरितां ते दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून ब ह अ कोन ई फ ड कोना बरोबर होय. ब क अ कोन ई फ ड कोना बरोबर आहे, असें गृहीतच आहे, ह्याकरितां ब ह अ कोन ब क अ कोना बरोबर आहे, म्हणजे अ ह क त्रिकोणाचा बाहे-

रील कोन आंतील पलीकडचे कोना बरोबर आहे, प- णही गोष्ट होणें अशक्य, ह्या करितां बक बाजू ईफ बा- जूशीं असमान आहे असें नाहीं, तर समानच आहे. अब- क त्रिकोणाच्या अब आणि बक ह्या दोन बाजू व अ- बक अंतर कोन डईफ त्रिकोणाच्या डई आणि इफ ह्या दोन बाजू व डईफ अंतरकोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, ह्याकरितां (४ थ्या सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप, म्हणून अक बाजू डफ बाजू बरोबर आहे, व बअक कोन ईडफ कोना बरोबर आहे.

२७ सिद्धांत.

दोन रेघांस एक रेघ छेदून व्युत्क्रम कोन बरोबर करीत असल्यास त्या दोन रेघा परस्परांशीं समांतर आ- हेत.

अब आणि कड अशा दोन रेघा आहेत, त्यांस ईफ रेघ छेदून अईफ आणि ईफड हे दोन व्युत्क्र- मकोन परस्पर बरोबर करते. त्यास अब आणि कड ह्या



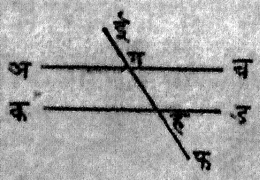
ह्या दोन रेघा समांतर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अब आणि कड ह्या दोन रेघा समांतर नाहींत असें म्हटल्यास, त्या रेघा पुरेतेपणीं वाढविल्या असतां कोणत्या तरी अंगास मिळाल्या पाहिजेत. तर ह्या रेघा उजव्या अंगास म्हणजे ब आणि ड ह्या बिंदूंच्या अंगास ग बिंदूंत मिळतात असें मानूं. आतां फगई हा त्रिकोण होईल, आणि (१६ व्या सि० प्र०) त्याचा बाहेरचा अईफ कोन ईफग कोनापेक्षां मोठा होईल. पण अईफ कोन ईफग कोना बरोबर आहे असें गृहीत आहे, ह्या करितां अईफ कोन ईफग कोनापेक्षां मोठा होणें हें अशक्य होय, म्हणून अब आणि कड ह्या दोन बाजू उजव्या अंगास मिळत नाहींत हें स्पष्ट आहे. ह्याप्रमाणेच ह्या डाव्या अंगासही मिळत नाहींत असें सिद्ध होतें. ज्या दोन रेघा दोहों अंगांस कितीही वाढविल्या असतां परस्पर मिळत नाहींत त्या रेघा समांतर आहेत. असें ३४ व्या व्याख्येमध्यें आहे, ह्या करितां अब आणि कड ह्या दोन रेघा समांतर आहेत.

२८ सिद्धांत.

एका रेघेनें दोन रेघांस छेदलें असतां जर बाह्य कोन, छेदक रेघेच्या ज्या अंगास तो कोन आहे त्याच आंगच्या पलीकडील अंतरकोना बरोबर होत आहे, किंवा जर दोह्नी अंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर होत आहे, तर त्या दोन रेघा परस्परांशीं समांतर आहेत.

ई फ रेघ, अ ब आणि क ड ह्या दोन रेघांस छेदून ई ग ब बाह्य कोन पलीकडच्या ग ह ड अंतर कोनाशीं बरोबर करते, किंवा ब ग ह आणि ग ह ड ह्या दोन्ही अंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर करते, असें मानल्यास



अ ब आणि क ड ह्या दोन रेघा समांतर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

ई ग ब कोन ई ह ड कोना बरोबर आहे, हें गृहीत आहे, आणि (१५ व्या सि॰ प्र॰) ई ग ब कोन अ ग ह कोना बरोबर आहे, ह्याकरितां अ ग ह

कोन गहड कोना बरोबर आहे. पण हे व्युत्क्रमकोन आहेत ह्याकरितां (२७ व्या सि० प्र०) अब आणि कड ह्या दोन रेघा समांतर आहेत.

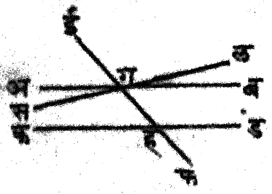
बगह आणि गहड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर आहेत, असें गृहीत आहे, आणि (१३ व्या सि० प्र०) अगह कोन आणि बगह कोन ह्यांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे, म्हणून अगह आणि बगह हे दोन कोन बगह आणि गहड ह्यां दोन कोनां बरोबर आहेत. दोन्ही पैक्यांस बगह कोन साधारण आहे, तो काढून टाकला असतां बाकीचा अगह कोन बाकीच्या गहड कोना बरोबर होईल. पण अगह आणि गहड हे व्युत्क्रमकोन आहेत, ह्याकरितां अब बाजू कड बाजूशीं समांतर आहे.

२९ सिद्धांत.

एका रेघेनें दोन समांतर रेघांस छेदलें असतां व्युत्क्रमकोन बरोबर होतात, बाह्य कोन छेदक रेघेच्या ज्या अंगास तो असतो, त्याच आंगच्या पलीकडच्या अंतरकोना बरोबर होतो, आणि छेदक रेघेच्या एका आं-

गऱ्या दोन अंतर्कोनांची बेरीज दोन काटकोनांब-
रोबर होते.

अब आणि कड ह्या दोन समांतर रेषांस ईफ
रेष छेदते, त्यास अगह् आणि गह्ड हे दोन व्यु
त्क्रम कोन बरोबर आहेत,



ईगब बाह्य कोन ई-
फ छेदक रेषेच्या उजव्या
अंगच्या पलीकडील गह्-
ड अंतर्कोना बरोबर आहे.
आणि एके अंगचे बगह्
आणि गह्ड हे दोन अंतर्कोन, दोन काटकोनां बरो-
बर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अगह् कोन गह्ड कोना बरोबर नाहीं, असें
म्हटल्यास गह्ड कोना बरोबर सगह् कोन करणा-
री अशी एक सळ रेष ग बिंदूतून काढूं. तेव्हां (२७-
वे सि॰ प्र॰) सळ रेष कड रेषेशीं समांतर आहे,
पण अब रेष कड रेषेशीं समांतर आहे असें गृहीत
आहे. ह्याकरितां परस्परांशीं न जमणाऱ्या अशा दोन
रेषा एकाच ग बिंदूतून कड रेषेशीं समांतर काढ-
ल्या असें झालें. पण ही गोष्ट अशक्य असें ११ वें प्र-

त्यक्ष प्रमाण आहे, ह्याकरितां ग ह ड कोन आणि अ-
ग ह हे कोन परस्परांशीं बरोबर नाहींत, असें म्हणतां येत
नाहीं, म्हणून ते परस्परांशीं अर्थातच बरोबर आहेत.
(१५ व्या सि० प्र०) अ ग ह कोन ई ग ब कोना बरो-
बर आहे, आणि अ ग ह कोन ग ह ड कोना बरोबर
आहे असें आतां सिद्ध केलें, ह्याकरितां ई ग ब कोन ग-
ह ड कोना बरोबर आहे. ह्या दोन्ही कोनांत ब ग ह को-
न मिळीव, तेव्हां ई ग ब आणि ब ग ह हे कोन ब ग-
ह आणि ग ह ड ह्या दोन कोनां बरोबर आहेत, पण
(१३ व्या सि० प्र०) ई ग ब आणि ब ग ह ह्या दोन
कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे, ह्या करि-
तां ब ग ह आणि ग ह ड ह्या दोन अंतर्कोनांची बेरीज
दोन काटकोनां बरोबर आहे, हें स्पष्ट आहे.

कु० स ल आणि क ड ह्या दोन रेषांमुळें ई फ रेषे-
शीं जे स ग ह आणि ग ह क हे दोन कोन होतात, ते
दोन काटकोनांपेक्षां कमी असल्यास ह्या कोनांच्या अं-
गास क ड आणि स ल रेषा पुरतेपणीं वाढविल्या अ-
सतां मिळतील.

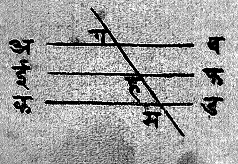
ह्या अंगास स ल आणि क ड ह्या दोन रेषा मि-
ळणार नाहींत असें म्हटल्यास, त्या समांतर आहेत किंवा

ईफ रेषेच्या उजव्या अंगास मिळतात, असें मानणें अवश्य आहे. त्या समांतर आहेत असें म्हणतां येत नाहीं, कारण सगह आणि गहक हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर होऊं लागतील. सल आणि कड ह्या दोन रेषा उजव्या अंगासही मिळत नाहींत, कारण मिळतील असें म्हटल्यास लगह आणि गहड हे कोन त्रिकोणांतील होऊं लागतील, आणि ते दोन काटकोनांपेक्षांही कमी होऊं लागतील, पण ते दोन काटकोनांपेक्षां कमी होणें अशक्य आहे, कारण सगह, हगल, गहक, आणि गहड हे चार कोन मिळून चार काटकोनां बरोबर आहेत, आणि ह्यां पैकीं सगह आणि गहक हे दोन कोन दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत असें मुळींच गृहीत आहे, ह्याकरितां हगल आणि गहड हे दोन कोन दोन काटकोनांपेक्षां मोठे आहेत हें स्पष्टच आहे, ह्यास्तव सल आणि कड रेषा ईफच्या उजव्या अंगास मिळणार नाहींत, आणि पूर्वीं सिद्ध केलें आहे कीं त्या रेषा समांतर नाहींत, ह्याकरितां सल आणि कड ह्या रेषा ईफ बाजूच्या डाव्या अंगास वाढविल्या असतां मिळतीलच मिळतील.

३० सिद्धांत.

ज्या रेघा दुसरे एके रेघेशीं समांतर असतात त्या परस्पर समांतर असतात.

अब आणि कड ह्या दोन रेघा ईफ रेघेशीं समांतर आहेत, त्यास अब रेघ कड रेघेशीं समांतर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

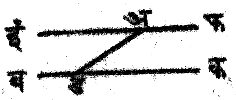


अब, ईफ, आणि कड ह्या तीन रेघांस छेदून जाणारी अशी एक गहस रेघ काढ. (२९ व्या सि० प्र०) अगह कोन गहफ कोना बरोबर आहे, आणि ईफ आणि कड ह्या दोन रेघांस गहस रेघ छेदिते, ह्याकरितां गहफ बाह्य कोन हसड कोना बरोबर आहे, आणि तुकतेंच सिद्ध केलें कीं, अगह कोन गहफ कोना बरोबर आहे, ह्याकरितां अगह कोन हसड कोना बरोबर आहे. आतां हे कोन व्युत्क्रम आहेत, ह्याकरितां (२७ व्या सि० प्र०) अब आणि कड ह्या रेघा समांतर आहेत.

३१ सिद्धांत.

विवक्षित बिंदूंतून विवक्षित रेषेशीं समांतर अशी एक रेघ काढावयाची.

अ एक बिंदू आहे व ब क एक रेघ आहे, त्यास अ बिंदूंतून ब क शीं समांतर अशी एक रेघ काढावयाची.



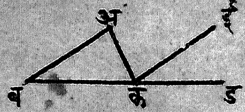
ब क रेषेंत एक ड बिंदू घे, आणि अ,ड सांध. अड रेषेंत अ बिंदूजवळ (२७ व्या सि० प्र०) अ ड क कोना बरोबर ई अ ड कोन कर, आणि ई अ, फ पर्यंत वाढीव.

ई फ आणि ब क ह्या दोन रेघांस अड रेघ मिळून ई अ ड आणि अ ड क असे दोन कोन करिते. ते कोन परस्परांशीं बरोबर आहेत, आणि ते व्युत्क्रम आहेत, ह्याकरितां (२७ व्या सि० प्र०) ई फ रेघ ब क रेषेशीं समांतर आहे, तेव्हां ई फ रेघ अ बिंदूंतून ब क शीं समांतर केली.

३२ सिद्धांत.

त्रिकोणाची कोणतीही बाजू बाहेर वाढविली असतां बाहेरच्या अंगास जो कोन होतो तो आंतील पलीकडच्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर असतो, आणि त्रिकोणाच्या आंतील तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याची **बक** बाजू **ड** पर्यंत वाढविली आहे, त्यास बाहेरील **अकड** कोन आंतील पलीकडच्या **अबक** आणि **बअक**



ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे, आणि **अबक**, **बअक**, आणि **बकअ** ह्या आंतील तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

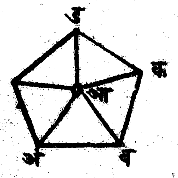
(३१ व्या सि॰ प्र॰) **क** बिंदूतून **अब** रेघेशीं **कई** समांतर रेघ काढ. **अब** आणि **कई** ह्या दोन समांतर रेघांस **अक** रेघ मिळते, त्यास (२९ व्या सि॰ प्र॰) **बअक** आणि **अकई** हे दोन कोन बरोबर

आहेत. त्याच दोन रेघांस बड रेघ छेदिते, ह्याकरितां बाहेरील ईकड कोन अबक कोना बरोबर आहे, परंतु अकई कोन बअक कोना बरोबर आहे, हें आतांच दाखविलें, ह्याकरितां सगळा बाहेरील कोन अकड आंतील पलीकडील अबक आणि बअक ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे. ह्या दोन्ही पैक्यांत अकब कोन मिळीव, तेव्हां अकड आणि अकब हे दोन कोन मिळून अ, ब, आणि अकब ह्या तीन कोनां बरोबर आहेत, पण अकड आणि अकब ह्या दोन कोनांची बेरीज (१३ व्या सि० प्र०) दोन काटकोनां बरोबर आहे, ह्यास्तव त्यांचे बरोबरीचे जे आंतील तीन कोन त्यांची बेरीज ही दोन काटकोनां बरोबर आहे.

पहिली कुरलरी. कोणत्याही सरल रेषाकृतीच्या आंतील सर्व कोनांत चार काटकोन मिळविले असतां त्यांची बेरीज त्या आकृतीचे बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां बरोबर होते.

अबकडई एक सरल रेषाकृति आहे. तर हिच्या मध्यें ओ बिंदू घेऊन त्यापासून त्या आकृतीच्या कोनांपर्यंत रेघा काढल्या असतां जितक्या त्या

आकृतीस बाजू आहेत तितके त्रिकोण पडतील, हें स्प-
ष्ट आहे. त्या आकृतींत जे काय त्रिकोण पडतील त्या सर्वांच्या कोनांची बेरीज मागील सिद्धांतावरून त्या त्रि-

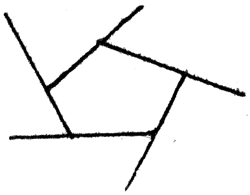


कोणांच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनांबरोबर आहे, म्हणजे त्या आकृतीस जितक्या बाजू आहेत, त्यांच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनांबरोबर आहे. आतां त्रिकोणांचे सर्व कोन, त्या आकृतींतील सर्व कोन व ओ बिंदूजवळ जे काय कोन झाले आहेत ते ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहेत. (१५ सि० २ कु० प्र०) ओ बिंदूजवळच्या सर्व कोनांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर आहे, ह्याकरितां सर्व त्रिकोणांच्या कोनांची बेरीज आकृतींतील कोन व चार काटकोन ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे, परंतु ते सर्व कोन आकृतीच्या बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनांबरोबर आहेत, असें सिद्ध केलेंच आहे, ह्याकरितां आकृतीच्या आंतील कोनांत चार काटकोन मिळविले असतां ती बेरीज त्या आकृतीच्या बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनांबरोबर होते.

दुसरी कुरलरी. कोणत्याही सरलरेषाकृतीचे

बाहेरील सर्वकोनांची बेरीज चार काटकोनां बरोबर असते.

(१२ व्या सि० प्र०) प्रत्येक आंतील कोन व त्या बेजवळच्या बाहेरील कोन ह्यांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर आहे, ह्यावरून स्पष्ट आहे, कीं आकृतीच्या आंतील व बाहेरील कोनांची बेरीज त्या आकृतीस जितक्या बाजू आहेत त्यांच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनां इतकी आहे. मागल्या कुरलरींत सिद्ध केलें, कीं आकृतीच्या आंतील कोनांत चार काटकोन मिळविले असतां ती बेरीज आकृतीच्या बाजूंच्या संख्येच्या दुप्पट काटकोनांबरोबर होते, ह्याकरितां बाहेरील कोन व आंतीलकोन ह्यांची बेरीज आंतील कोन व चार काटकोन ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे, ह्यास्तव बाहेरीलकोन चार काटकोनांबरोबर आहेत हें सिद्ध.



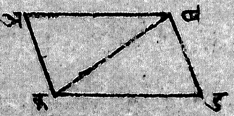
तिसरी कुरलरी. एका त्रिकोणांतील दोन कोनांची बेरीज दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोनकोनांच्या बेरजे बरोबर असल्यास त्या दोन्ही त्रिकोणांचे तिसरेकोन बरोबर असतात.

चवथी कुरलरी. काटकोन त्रिकोणांत जे दोन तिर्यक्‌कोन असतात त्यांची बेरीज एका काटकोना-बरोबर असते.

३३ सिद्धांत.

समांतर व समान अशा दोन रेघांची एकेका आंगचीं टोकें सांधणाऱ्या ज्या रेघा असतात त्याही समांतर व समान असतात.

अब आणि कड ह्या दोन रेघा समांतर आणि समान आहेत. त्यास त्यांच्या एकेका आंगचीं टोकें सांधणाऱ्या ज्या रेघा अक आणि बड ह्याही समांतर आणि समान आहेत, हें सिद्ध करावयाचें. ब, क सांध.



अब आणि कड ह्या दोन समांतर रेघांस बक रेघ सांधते, ह्याकरितां (२९ व्या सि० प्र०) अबक व्युत्क्रमकोन बकड व्युत्क्रमकोनाबरोबर आहे, अब बाजू कड बाजूबरोबर आहे, आणि बक, अबक आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांस

साधारण आहे, ह्याकारितां अबक त्रिकोणाच्या अब आणि बक ह्या दोन बाजू बकड त्रिकोणाच्या कड आणि बक ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, आणि अबक अंतरकोन बकड अंतरकोना बरोबर आहे, ह्याकरितां (४थ्या सि॰ प्र॰) अक बाजू बड बाजू बरोबर आहे, आणि अब बाजू समोरच्या जो अकब कोन हा अबच्या बरोबरीची जी कड बाजू हिच्या समोरच्या कबड कोना बरोबर आहे. बड आणि अक ह्या दोन रेषांस बक रेघ मिळून अकब आणि कबड हे व्युत्क्रमकोन बरोबर करिते, ह्याकरितां (२७ व्या सि॰ प्र॰) अक, बडशीं समांतर आहे, आणि अक, बड बरोबर आहे, हें आतांच सिद्ध केलें.

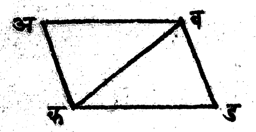
पहिली कुरलरी. एका सरळरेघेवर एका अंगास दोन सारखे लंब काढले असतां त्या लंबांचीं शिरें सांधणारी रेघ जीवर लंब काढले आहेत तिशीं समांतर होईल, आणि दोन लंबांत जो तिचा भाग सांपडला आहे त्याशीं बरोबर होईल, कारण ते लंब बरोबर आहेत, आणि (२८ व्या सि॰ प्र॰) समांतर आहेत, ह्याकरितां त्यांचीं शेवटें सांधणाऱ्या रेघा समांतर व बरो-

बर आहेत, हें सिद्धच आहे.

३४ सिद्धांत.

समांतरभुज चौकोनांत समोरासमोरच्या बाजू व समोरासमोरचे कोन परस्पर बरोबर असतात, आणि कर्ण त्याचे दोन समान भाग करितो.

अकडब एक समांतरभुज चौकोन आहे, आणि त्याचा कर्ण **कब** आहे, त्यास ह्या समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू व कोन बरोबर आहेत, व **कब** कर्ण त्याचे दोन भाग समान करतो, हें सिद्ध करावयाचें.



अब बाजू **कड** बाजूशीं समांतर आहे, आणि त्यांस **बक** बाजू मिळते, ह्या करितां (२९ व्या सि० प्र०) **अबक** आणि **बकड** हे व्युत्क्रम कोन बरोबर आहेत, तसेंच **अक** आणि **बड** ह्या बाजू समांतर आहेत, आणि त्यांस **बक** मिळते, ह्या करितां **अकब** कोन **कबड** कोनाबरोबर आहे. **अबक** त्रिकोणाचे **अबक** आणि **बकअ** हे दोन कोन अनुक्रमें

ड ब क त्रिकोणाच्या ब क ड आणि क ब ड ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत, व ब क बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे, आणि ती समान कोनांच्या मधली बाजू आहे, ह्याकरितां (२६ व्या सि० प्र०) ते दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून अ ब, क ड, बाजू बरोबर आहे, अ क बाजू ब ड बाजू बरोबर आहे, व ब अ क कोन ब ड क कोनाबरोबर आहे. आतां अ ब क कोन ब क ड कोनाबरोबर आहे, आणि ड ब क कोन अ क ब कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां सगळा अ ब ड कोन सगळ्या अ क ड कोनाबरोबर आहे. ब अ क कोन ब ड क कोनाबरोबर आहे हें नुकतेंच सिद्ध केलें, ह्याकरितां अ ब क ड समांतर भुज चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन व बाजू परस्पर बरोबर आहेत; व कर्ण त्याचे दोन भाग समान करितो, कारण अ ब क आणि ब क ड हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं परस्पर बरोबर आहेत.

पहिली फुरकरी. समांतर रेषांच्या मधील अंतर सारखें असतें. समांतर रेषांपैकीं एके रेषेंत दोन बिंदु घेऊन त्यांतून दोन लंब त्या रेषेवर काढून दुसऱ्या रेषेस मिळे तोंपर्यंत वाढीव. ते लंब (२८ व्या सि० प्र०) समांतर आहेत, व लंबामध्यें जे रेषांचे भाग सांपडले

आहेत, ते परस्परांशीं समांतर आहेत, ह्याकरितां हा एक समांतरभुज चौकोन जमला, आणि ह्या समांतरभुज चौकोनांत लंब समोरासमोर आहेत, ह्याकरितां ते परस्पर बरोबर आहेत.

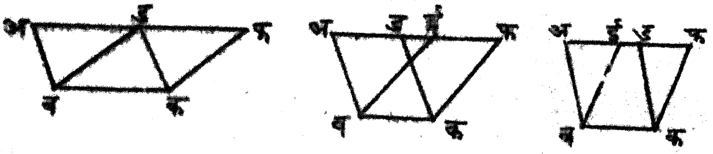
दुसरी कुरलरी. वरच्या कुरलरीवरून सिद्ध होतें, कीं समांतर रेघांच्या जोडांत जे त्रिकोण व चौकोन असतात ते सारख्या उंचीचे असतात, व ज्या त्रिकोणांची व समांतर भुज चौकोनांची उंची सारखी असते व ज्यांचे पाये एकाच रेघेंत असून तिचे एकेच अंगास असतात ते समांतर रेघांच्या जोडांत असतात.

३५ सिद्धांत.

एकाच पायावर आणि समांतर रेघांचे एकाच जोडांत जे समांतरभुज चौकोन असतात ते परस्पर क्षेत्रफळानें बरोबर असतात.

अबकड आणि ईबकफ (दुसरी आणि तिसरी आकृति पाहा.) हे दोन समांतरभुज चौकोन बक पायावर आहेत, आणि अफ आणि बक ह्या दोन समांतर रेघांचे जोडांत आहेत, त्यास अबकड समांतरभुज चौकोन ईबकफ समांतरभुज चौकोना बरोबर

आहे हें सिद्ध करावयाचें.



(पहिली आकृति पाहा.) अबकड आणि डबकफ ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांच्या बक पायासमोरील ज्या अड आणि डफ बाजू ह्या ड बिंदूंत समास होत असल्यास (३४ ज्या सि॰ प्र॰) प्रत्येक समांतरभुज चौकोन डबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे हें स्पष्ट आहे, आणि ह्याकरितां ते परस्परांशीं बरोबर आहेत.

परंतु (दुसऱ्या आकृतींत) अबकड आणि ईबकफ ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांच्या बक पायाच्या समोरील अड आणि ईफ ह्या बाजू एकाच बिंदूंत समास होत नाहींत त्यापक्षीं विचार. अबकड समांतरभुज चौकोन आहे, ह्याकरितां अड बाजू बक बाजू बरोबर आहे, व ईबकफ समांतरभुज चौकोन आहे, ह्याकरितां ईफ, बक बरोबर आहे, ह्याकरितां (१ ल्या स॰ प्र॰) अड, ईफ बरोबर आहे, आतां डई रेघ

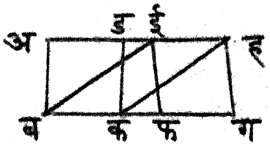
दुसऱ्या आकृतीत अड आणि ईफ ह्यांत मिळविली असतां आणि तिसऱ्या आकृतीत ती अड आणि ईफ ह्यांत वजा केली असतां) अई, डफ बरोबर होते. अब, डक बरोबर आहे, ह्यास्तव अई आणि अब ह्या दोन बाजू डफ आणि डक ह्या दोन बाजूं बरोबर आहेत, आणि फडक बाह्य कोन (२९ व्या सि० प्र०) आंतील ईअब अंतर्कोना बरोबर आहे, ह्यास्तव (४ थ्या सि० प्र०) ईअब त्रिकोण फडक त्रिकोणा बरोबर आहे. अबकफ ह्या त्रापिज्यमांतून फडक त्रिकोण काढून टाकिला असतां त्याच त्रापिज्यमांतून ईअब त्रिकोण काढून टाकिला असतां ज्या बाक्या राहातील त्या (३ ऱ्या प्र० प्र०) परस्पर बरोबर होतील, म्हणजे अबकड समांतरभुज चौकोन ईबकफ समांतरभुज चौकोना बरोबर आहे.

३६ सिद्धांत.

समांतर पायांवर आणि एकेच समांतर रेषांचे जोडांत जे समांतर भुज चौकोन असतात ते परस्पर समान असतात.

अबकड आणि ईफगह हे दोन समांतर

भुज चौकोन बक आणि फग ह्या दोन समान पायां-
वर आणि अह आणि ब-
ग ह्या दोन समांतर रेषांचे
जोडांत आहेत, त्यास ते पर-
स्पर बरोबर आहेत, हें सिद्ध
करावयाचें. बई आणि कह बिंदु सांध.



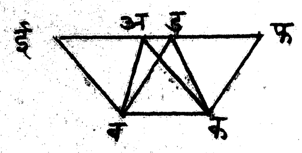
बक बाजू फग बाजू बरोबर आहे, आणि (२४ व्या सि० प्र०) फग, ईह बरोबर आहे, ह्या करितां बक, ईह बरोबर आहे, आणि ह्या रेषा समांतर ही आहेत, ह्या करितां त्यांचीं शेवटें सांधणाऱ्या ज्या रेषा बई आणि कह ह्याही (३३ व्या सि० प्र०) परस्परांशीं समांतर व बरोबर आहेत, ह्या करितां बकहई हा समांतरभुज चौकोन झाला. (३५ व्या सि० प्र०) ईबकह समांतरभुज चौकोन अबकड समांतरभुज चौकानाशीं बरोबर आहे, कारण ते बक पायावर आणि बग, अह ह्या समांतर रेषांचे जोडांत आहेत. ईबकह समांतरभुज चौकोन ईफगह बरोबर आहे, कारण ते दोन्ही चौकोन ईह पायावर आणि ईह आणि बग ह्या दोन समांतर रेषांचे जोडांत आहेत, ह्यास्तव (१ ल्या प्र०

प्र०) अबकड आणि ईफगह हे समांतरभुज चौकोन परस्पर बरोबर आहेत.

२७ सिद्धांत.

एकाच पायावर आणि समांतर रेघांचे एकाच जोडांत जे त्रिकोण असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

बक पायावर आणि बक आणि अड ह्या दोन समांतर रेघांचे जोडांत अबक आणि डबक हे दोन त्रिकोण आहेत, त्यास ते परस्पर बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



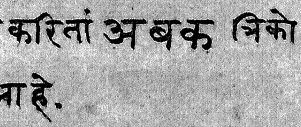
अड रेघ दोन्ही अंगांस ई आणि फ ह्या दोन बिंदूपर्यंत वाढीव, आणि (३१ व्या सि० प्र०) ब बिंदूतून बई रेघ अकशीं समांतर कर, आणि क बिंदूतून कफ रेघ बडशीं समांतर कर. आतां ईबकअ आणि डबकफ ह्या दोन्ही आकृति समांतरभुज चौकोन आहेत, व त्या बक पायावर आणि बक आणि ईफ ह्या दोन समांतर रेघांच्या आंत आहेत,

ह्या करितां (२९ व्या सि० प्र०) त्या परस्पर बरोबर आहेत; (३४ व्या सि० प्र०) **अबक** त्रिकोण **ई-बकअ** समांतरभुज चौकोनाचा अर्धाभाग आहे, कारण **अब** कर्णरेघ त्याचे दोन समानभाग करते; तसेंच **डबक** त्रिकोण **डबकफ** समांतरभुज चौको-नाचा अर्धाभाग आहे, कारण **डक** कर्णरेघ त्याचे दोन समानभाग करते. आतां ज्या वस्तु परस्पर बरो-बर असतात त्यांचीं अर्धेंही बरोबर असतात, असें सातवें प्रत्यक्ष प्रमाण आहे, ह्या करितां **अबक** त्रिको-ण **बडक** त्रिकोणा बरोबर आहे.

३८ सिद्धांत.

समान पायांवर आणि समांतर रेषांचे एकाच जोडांत जे त्रिकोण असतात, ते परस्पर बरोबर अस-तात.

बक आणि **ईफ** ह्या दोन समान पायांवर आ-णि **बफ** आणि **अड** ह्या दोन समांतर रेषांचे जोडांत **अबक** आणि **डईफ** हे दोन त्रिकोण आहेत, त्यास



ते परस्पर बरोबर आहेत, हे सिद्ध करावयाचें.

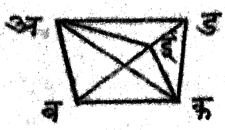
अड बाजू ग आणि ह ह्या दोन बिंदूपर्यंत दोन्ही अंगांस वाढीव, आणि (३१ व्या सि० प्र०) ब बिंदूतून बग रेघ अकशीं समांतर काढ, तसेंच फ बिंदूतून फह रेघ ईड रेघेशीं समांतर काढ. तेव्हां गबकअ आणि डईफह हे दोन्ही समांतरभुज चौकोन आहेत. हे समांतरभुज चौकोन बक आणि ईफ ह्या समान पायांवर आणि बफ आणि गह ह्या दोन समांतर रेघांचे जोडांत आहेत, ह्याकरितां ते (३६ व्या सि० प्र०) परस्पर बरोबर आहेत. (३४ व्या सि० प्र०) बअ कर्णरेघ गबकअ समांतरभुज चौकोनाचे दोन समानभाग करते, ह्याकरितां अबक त्रिकोण त्याचा अर्धभाग आहे, तसेंच डफ कर्णरेघ डईफह समांतरभुज चौकोनाचे दोन समानभाग करते, ह्याकरितां डईफ त्रिकोण त्याचें अर्ध आहे. आतां ज्या वस्तु परस्पर बरोबर असतात, त्यांचीं अर्धेंही बरोबर असतात, असें सातवें प्रत्यक्षप्रमाण आहे, म्हणून अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बरोबर आहे.

३९ सिद्धांत.

एका पायावर आणि त्याच्या एके अंगास जे समान त्रिकोण असतात ते समांतर रेषांच्या एकाच जोडांत असतात.

बक पायावर त्याचे एके अंगास अबक आणि डबक असे दोन समान त्रिकोण आहेत, त्यास ते समांतर रेषांचे एकाच जोडांत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अ,ड बिंदू सांध; अड रेघ बकशीं समांतर आहे. जर नसेल तर (३१ व्या सि० प्र०) अ बिंदूतून बकशीं अई रेघ समांतर काढ, आणि कई बिंदु सांध. आतां अबक आणि बकई हे त्रिकोण



(३७ व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, कारण ते एका बक पायावर आहेत, आणि बक आणि अई ह्या दोन समांतर रेषांच्या आंत आहेत; परंतु अबक त्रिकोण बकड त्रिकोणाबरोबर आहे. ह्याकरितां बकड त्रिकोण बकई त्रिकोणाबरोबर आहे, परंतु

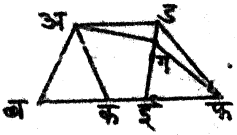
मोठा त्रिकोण लहाना बरोबर होणें, ही गोष्ट अशक्य आहे, ह्या करितां अई, बकशीं समांतर नाहीं. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल कीं, अड रेघेशिवाय दुसरी रेघ बक शीं समांतर होणार नाहीं, ह्यास्तव अड, बकशीं समांतर आहे, तेव्हां अबक आणि डबक हे त्रिकोण बक आणि अड ह्या दोन समांतर रेघांचे जोडांत आहेत.

कु॰ हा सिद्धांत समांतरभुज चौकोनांसही लागू आहे, कारण अबक आणि बकड हे त्रिकोण विवक्षित दोन समांतरभुज चौकोनांचें अर्धभाग आहेत असें मानलें, तर अड रेघ बक रेघेशीं समांतर आहे, आणि त्या दोन समांतरभुज चौकोनांच्या अ आणि ड ह्या बिंदूंतून जाणाऱ्या बाजू बकशीं समांतर असतील, ह्या करितां त्या बाजू व अड रेघ हीं (११ व्या प्र॰ प्र॰) एकाच रेघेंत असलीं पाहिजेत.

४॰ सिद्धांत.

जे त्रिकोण एका रेघेंत असणाऱ्या अशा समान पायांवरच्या रेघेच्या एके अंगास असतात ते समांतर रेघांच्या एकेच जोडांत असतात.

बफ रेषेंत असणाऱ्या अशा समान बक आणि ईफ ह्या पायांवर व बफ रेषेचे एके अंगास अबक आणि डईफ असे दोन त्रिकोण आहेत, त्यास ते समांतर रेषांच्या एकेच जोडांत आहेत, असें सिद्ध करावयाचें.



अ, ड बिंदु सांध; अड रेष बफ रेषेशीं समांतर आहे; नसल्यास (३१ व्या सि० प्र०) अ बिंदूंतून बफ रेषेशीं अग रेष समांतर काढ. आणि फ, ग बिंदु सांध. अबक आणि गईफ हे दोन त्रिकोण बक आणि ईफ ह्या समान पायांवर आणि बफ आणि अग ह्या समांतर रेषांच्या जोडांत आहेत, ह्याकरितां ते (३८ व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, पण अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणां बरोबर आहे, असें गृहीत आहे, ह्याकरितां डईफ त्रिकोण गईफ त्रिकोणा बरोबर आहे, पण मोठा त्रिकोण ल्हाना बरोबर होणें अशक्य होय, ह्याकरितां अग रेष बफ रेषेशीं समांतर नाहीं, आणि ह्या प्रमाणेंच सिद्ध करून दाखवितां येईल, कीं अड शिवाय दुसरी रेष बफ शीं

समांतर असणार नाहीं, म्हणून अड, बफशीं समांतर आहे.

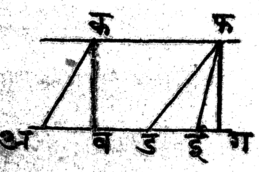
कु॰ हा सिद्धांत समांतरभुज चौकोनांसही लागू आहे. आतां त्याची सिद्धता मागल्या सिद्धांताच्या कुरलरी प्रमाणें होते.

अ सिद्धांत.

समांतर रेघांचे एकाच जोडांत जे समान त्रिकोण असतात ते समान पायांवर असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण अई आणि कफ ह्या दोन समांतर रेघांचे जोडांत आहेत, आणि हे दोन त्रिकोण क्षेत्र फळानें समान आहेत, ह्याकरितां ह्यांचे पाये अब आणि डई हे बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अब पाया डई पाया बरोबर नाहीं असें म्हटल्यास, अब, डई पेक्षां मोठा आहे असें मानूं. डई पाया ग पर्यंत वाढीव इतका कीं डग रेघ अब बरोबर होईल; ग, फ बिंदु सांध. अबक आणि



डगफ हे दोन त्रिकोण अग आणि कफ ह्या दोन समांतर रेघांचे जोडांत आहेत, व अब आणि डग ह्या समान पायांवर आहेत, ह्याकरितां (२८ व्या सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आहेत. अबक आणि डईफ हे त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत, असें गृहीत आहे, ह्याकरितां डगफ त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बरोबर आहे, पण मोठा त्रिकोण लहान त्रिकोणाबरोबर होणें अशक्य, ह्याकरितां अब पाया डई पायापेक्षां मोठा नाहीं, आणि ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करून दाखवितां येईल, कीं तो त्यापेक्षां कमी नाहीं, ह्यास्तव अब, डई बरोबर आहे.

कु० हा सिद्धांत समांतरभुज चौकोनांस ही लागू आहे.

१ टीप. "समांतर रेघांचे एकाच जोडांत" ह्या ठिकाणीं "समान उंचीचे" असें म्हटलें असतांही मागील सात सिद्धांत व शेवटच्या तीन सिद्धांतांच्या कुरल्या हीं सिद्ध होतात. "समान उंचीचे" असें म्हटलें असतां शेवटच्या तीन सिद्धांतांतील त्रिकोण किंवा समांतरभुज चौकोन हे आपल्या पायांचे एकेच अंगास कदाचित् असणार नाहींत, किंवा त्यांचे पाये एकेच रेघेंत अस-

णार नाहींत. नसल्यास चिंता नाहीं, कारण पाहिजेत अशा दोन आकृति नसल्यास त्यांशीं समान पाहिजेत अशा आकृति (२२ व्या सि॰ प्र॰) कराव्या, आणि त्यांविषयीं प्रतिज्ञार्थ सिद्ध झाला असतां त्या, ज्या आकृतींशीं समान केल्या आहेत त्यांविषयीं सिद्ध आहे, हें स्पष्ट आहे.

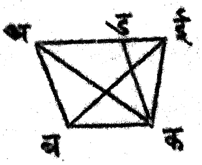
२ टीप. मागील सिद्धांतांवरून असें दिसतें, कीं त्रिकोण किंवा समांतरभुज चौकोन ह्यांचे समान पाये, समान उंच्या व समान क्षेत्रफळें ह्या तीन गोष्टींपैकीं दोन असल्यावर तिसरी असतेच; म्हणजे समान उंच्या व समान पाये असल्यास समान क्षेत्रफळें असतात, समान पाये व समान क्षेत्रफळें असल्यास समान उंच्या असतात, आणि समान क्षेत्रफळें व समान उंच्या असल्यास समान पाये असतात.

४१ सिद्धांत.

एक समांतरभुज चौकोन आणि एक त्रिकोण हे दोन्ही एकाच पायावर आणि समांतर रेघांच्या एकाच जोडांत असल्यास, समांतरभुज चौकोन त्रिकोणाच्या दुप्पट किंवा त्रिकोण समांतरभुज चौकोनाच्या अर्धा

बरोबर असतो.

बक पायावर आणि बक आणि अई ह्या दोन समांतर रेषांच्या जोडांत अबकड समांतरभुज चौकोन आणि बकई त्रिकोण आहेत, त्यास अबकड समांतरभुज चौकोन ईबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



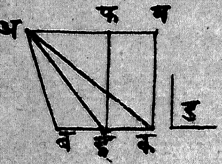
अ, क बिंदु सांध. अबक आणि बकई हे दोन त्रिकोण बक पायावर आणि बक आणि अई ह्या दोन समांतर रेषांच्या जोडांत आहेत, ह्याकरितां (२७ व्या सि० प्र०) ते बरोबर आहेत, पण (२५ व्या सि० प्र०) अबकड समांतरभुज चौकोन अबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे, ह्याकरितां अबकड समांतरभुज चौकोन हा ईबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे.

४२ सिद्धांत.

ज्याचें क्षेत्रफळ विवक्षित त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा एक कोन विवक्षित कोनाबरोबर

होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन करावयाचा.

अ ब क एक त्रिकोण आहे, व ड एक कोन आहे. त्यास जो क्षेत्रफळानें अ ब क त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा एक कोन ड कोनाबरोबर होईल,



असा समांतरभुज चौकोन काढावयाचा.

(१० व्या सि० प्र०) ब क रेषेचे ई स्थळीं दोन समान भाग कर, आणि अ, ई बिंदु सांध, (२३ व्या सि० प्र०) ई क रेषेंत ई बिंदूजवळ क ई फ कोन ड कोना-एवढा कर, आणि (३१ व्या सि० प्र०) क बिंदूतून क ग रेष ई फ रेषेशीं समांतर कर, व अ बिंदूतून अ ग रेष ब कशीं समांतर कर.

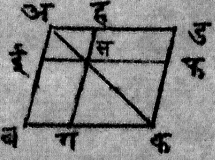
अ ब ई आणि अ ई क हे दोन त्रिकोण ब ई आणि ई क ह्या समान पायांवर आहेत, आणि अ ग आणि ब क ह्या दोन समांतर रेषांच्या जोडांत आहेत, ह्याकरितां ते (३८ व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, ह्याकरितां अ ब क त्रिकोण अ ई क त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे. (४१ व्या सि० प्र०) ई ग समांतरभुज चौकोन अ ई क त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे, कारण ते दोन्ही

एका ई क पायावर आणि अग आणि ई क ह्या दोन समांतर रेघांच्यामध्यें आहेत, ह्याकरितां ई ग समांतरभुज चौकोन अ ब क त्रिकोणाबरोबर आहे, व ई ग समांतरभुज चौकोनाच्या फ ई क कोन ड कोनाबरोबर केलाच आहे.

४३ सिद्धांत.

समांतरभुज चौकोनांत कर्ण रेघ ज्या समांतरभुज चौकोनांतून जाते त्यांचे अंगास जे भरतीचे समांतरभुज चौकोन असतात ते परस्परक्षेत्रानें बरोबर असतात.

अ ब क ड एक समांतरभुज चौकोन आहे, व त्याचा कर्ण अ क आहे, तो ई ह आणि ग फ ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांतून जातो, त्यास त्यांच्या अंगास जे भरतीचे* समांतरभुज चौकोन ब स आणि स ड



* ब स आणि स ड ह्या दोन समांतरभुज चौकोनांस भरतीचे समांतरभुज चौकोन म्हणण्याचें कारण असें, कीं ते ई ह आणि ग फ ह्या समांतरभुज चौकोनांत मिळविले असतां सगळा अ ब क ड समांतरभुज चौकोन होतो.

आहेत ते परस्पर बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अबकड समांतरभुज चौकोन आहे, आणि अक त्याचा कर्ण आहे, त्यास (३४ व्या सि० प्र०) अबक त्रिकोण अडक त्रिकोणाबरोबर आहे. अईसह, समांतरभुज चौकोन आहे, आणि अस त्याचा कर्ण आहे, त्याकरितां अईस त्रिकोण अहस त्रिकोणाबरोबर आहे, आणि त्याच कारणास्तव सगक त्रिकोण सफक त्रिकोणाबरोबर आहे. अईस त्रिकोण अहस त्रिकोणाबरोबर आहे, व सगक त्रिकोण सफक त्रिकोणाबरोबर आहे, त्याकरितां अईस त्रिकोण आणि सगक त्रिकोण मिळून अहस आणि सफक ह्या त्रिकोणांबरोबर आहेत. आतां सगळा अबक त्रिकोण सगळ्या अडक त्रिकोणाबरोबर आहे, त्याकरितां ईग समांतरभुज चौकोन सड समांतरभुज चौकोनाबरोबर आहे, हें स्पष्ट आहे.

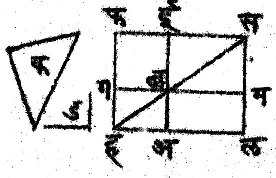
४४ सिद्धांत.

ज्याचें क्षेत्रफळ विवक्षित त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाबरोबर होईल वज्याचा कोणता तरी एक कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुज चौ-

कोन एका विवक्षित रेषेस लावावयाचा.[+]

क एक त्रिकोण आहे, ड एक कोन आहे, आणि अ-ब एक रेघ आहे, त्यास असा एक समांतरभुज चौकोन अ ब रेषेस लावावयाचा आहे, कीं ज्याचें क्षेत्रफळ क त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाबरोबर होईल, व ज्याचा एक कोन ड कोनाबरोबर होईल.

(४२ व्या सि० प्र०) ज्याचा ग ब ई कोन ड कोनाबरोबर आहे असा ब ई फ ग समांतरभुज चौकोन क त्रिकोणा बरोबर कर, आणि तो अ-



ब रेषेजवळ अशा तऱ्हेनें ठेव, कीं अ ब आणि ब ई ह्या दोन रेषा एका रेषेंत येतील. फ ग रेघ ह पर्यंत वाढीव, अ बिंदूतून ह अ रेघ (३१ व्या सि० प्र०) ग ब शीं किंवा फ ई शीं समांतर कर, आणि ह, ब बिंदु सांध. फ ह रेघ फ ई व ह अ ह्या दोन समांतर रेषांस भिडते, ह्या करितां ई फ ह आणि फ ह अ हे दोन कोन

+ विवक्षित रेषेस समांतरभुज चौकोन लावणें म्हणजे विवक्षित रेघ त्या समांतरभुजचौकोनाची बाजू करणें.

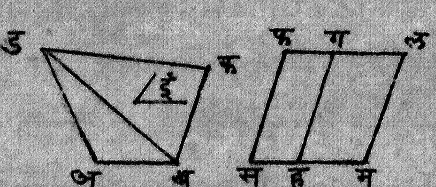
मिळून (२९ व्या सि० प्र०) दोन काटकोनांबरोबर आहेत, तेव्हां ई फह आणि गहब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत. ज्या दोन रेषा तिसऱ्या रेषेशीं मिळून आंतील दोन कोन दोन काटकोनांपेक्षां कमी करतात त्या रेषा पुरत्या वाढविल्या असतां पुढें मिळतात, ह्यास्तव फई आणि हब ह्या दोन रेषा वाढविल्या असतां मिळतील. त्या स स्थळीं मिळतात, असें मानूं. स बिंदूंतून सल, ईअ किंवा फह रेषेशीं समांतर कर. हअ आणि गब रेषा ल आणि म बिंदूंपर्यंत वाढीव. आतां हलसफ समांतरभुज चौकोन झाला, त्यांत हस कर्ण आहे, आणि ज्यांतून कर्णरेष जाते ते अग आणि मई समांतरभुज चौकोन होत, आणि त्यांचे भरतीचे समांतरभुज चौकोन लब आणि बफ होत. त्यास (४३ व्या सि० प्र०) लब आणि बफ हे चौकोन परस्पर बरोबर आहेत. बफ चौकोन क त्रिकोणाबरोबर केला आहे, ह्याकरितां लब ही क त्रिकोणाबरोबर आहे. (१५ व्या सि० प्र०) गबई कोन अबम कोनाबरोबर आहे, परंतु गबई कोन ड कोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव अबम कोनही ड कोनाबरोबर

आहे, ह्या करितां ज्याचें क्षेत्रफळ क त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाबरोबर आहे, व ज्याचा एक अबम कोन ड कोनाबरोबर आहे, असा अबमल समांतरभुज चौकोन अब रेघेस लावून केला असे.

४५ सिद्धांत.

ज्याचें क्षेत्रफळ विवक्षित आकृतीचे क्षेत्रफळा बरोबर होईल, व ज्याचा एककोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन करावयाचा आहे.

अबकड एक आकृति आहे, आणि ई हा एक कोन आहे, त्यास जो ह्या आकृती बरोबर होईल, आणि ज्याचा एक कोन ई कोनाबरोबर होईल, असा एक समांतरभुज चौकोन काढावयाचा आहे.



ड, ब बिंदु सांध. जो अबड त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा फसह कोन ई कोनाबरोबर होईल, असा फसहग समांतरभुज चौकोन (४२

व्या सि॰ प्र॰) फरम जो ड ब क त्रिकोणाबरोबर होईल, व ज्याचा ग ह म कोन ई कोनाबरोबर होईल, असा ग ह म ल समांतरभुज चौकोन ग ह रेषेस (४४ व्या सि॰ प्र॰) लाव. आतां फ स ह आणि ग ह म हे दोन्ही कोन ई कोनाबरोबर आहेत, ह्याकरितां ते परस्पर बरोबर आहेत. ह्या दोहों कोनांत ग ह स कोन मिळीव, तेव्हां ग ह स आणि ग ह म हे दोन कोन ग ह स आणि ह स फ ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत, परंतु (२९ व्या सि॰ प्र॰) ग ह स आणि ह स फ हे दोन कोन, दोन काटकोनांबरोबर आहेत, ह्याकरितां ग ह स आणि ग ह म हे दोन कोन ही दोन काटकोनांबरोबर आहेत, ह्यास्तव (१४ व्या सि॰ प्र॰) स ह आणि ह म ह्या दोन्ही रेषा एका रेषेंत आहेत. ह ग रेषा स म आणि फ ग ह्या दोन समांतर रेषांस मिळते, ह्याकरितां ग ह म व्युत्क्रम कोन ह ग फ व्युत्क्रमकोनाबरोबर आहे. ह्या दोन्ही कोनांत ह ग ल कोन मिळीव, तेव्हां म ह ग आणि ह ग ल हे दोन कोन ह ग ल आणि ह ग फ ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत. परंतु म ह ग आणि ह ग ल हे दोन कोन दोन काटकोनांबरोबर आहेत, ह्याकरितां ह ग ल

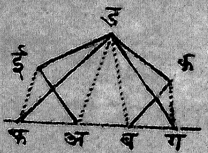
आणि ह ग फ हेही दोन कोन दोन काटकोनांबरोबर आहेत. म्हणून फग आणि गल ह्या दोन रेघा एकारेषेंत आहेत. सफ रेघ हग रेघेशीं समांतर आहे, आणि हग मलशीं समांतर आहे, ह्याकरितां (३० व्या सि॰ प्र॰) सफ मलशीं समांतर आहे, आणि फल, सम रेघेशीं समांतर आहे, म्हणून सफलम हा समांतरभुज चौकोन आहे. अबड त्रिकोण हफ समांतरभुज चौकोनाबरोबर आहे, आणि डबक त्रिकोण गम बरोबर आहे, ह्याकरितां सगळें अबकड क्षेत्र सगळ्या सफलम समांतरभुज चौकोनाबरोबर आहे, आणि फसम कोन ई कोनाबरोबर केला आहे.

१ कु॰ ज्याचें क्षेत्रफळ एका विवक्षित सरलरेषाकृती बरोबर होईल व ज्याचा एककोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल, असा समांतरभुज चौकोन एका विवक्षित रेघेस कसा लावावा, हें ह्या सिद्धांतावरून स्पष्ट करून घेतें.

ब सिद्धांत.

ज्याचें क्षेत्र विवक्षित सरलरेषाकृतीच्या क्षेत्राबरोबर होईल, असा त्रिकोण करावयाचा.

अबकडई एक क्षेत्र आहे, त्यास ह्याबरोबर एक त्रिकोण करावयाचा.



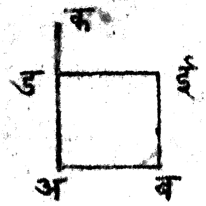
अब रेघ फ आणि ग ह्या बिंदूकडे वाढीव. ब, ड बिंदू सांध. क बिंदूंतून कग रेघ डब रेषेशीं समांतर कर, आणि ड, ग बिंदु सांध. तसेंच अ, ड बिंदु सांध, ई बिंदूंतून ईफ रेघ डअशीं समांतर कर, आणि ड, फ बिंदू सांध. डब आणि कग ह्या रेघा समांतर आहेत, ह्याकरितां (३७ व्या सि० प्रं०) बडग आणि बडक हे दोन त्रिकोण परस्परबरोबर आहेत, तसेंच अड आणि फई ह्या रेघा समांतर आहेत, ह्याकरितां फअड त्रिकोण अईड त्रिकोणाबरोबर आहे, ह्याकरितां अफड आणि बगड हे दोन त्रिकोण मिळून अईड आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांबरोबर आहेत. ह्या

दोन्ही पेल्यांत अबड त्रिकोण मिळीव, त्यास सगळा फडग त्रिकोण अबकडई आकृती-बरोबर झाला.

४६ सिद्धांत.

विवक्षित रेघेवर चौरस करावयाचें.

अब एक रेघ आहे, त्यास तीवर चौरस काढावयाचें.



(११ व्या सि० प्र०) अ बिंदूतून अब रेघे-वर अक लंब कर, आणि अड, अब रेघेबरोबर (३ व्या सि० प्र०) कर. (३१ व्या सि० प्र०) ड बिंदूतून अब रेघेशीं डई रेघ समांतर कर, आणि ब बिंदूतून बई रेघ अड शीं समांतर कर, आतां अबईड हा समांतरभुज चौकोन झाला. आणि ह्यास्तव (३४ व्या सि० प्र०) त्याच्या समोरासमोरच्या बाजू म्हणजे डई आणि अब आणि अड आणि बई ह्या परस्परबरोबर आहेत, परंतु अब बाजू अड बाजू-बरोबर आहे, ह्याकरितां अब, बई, ईड आणि

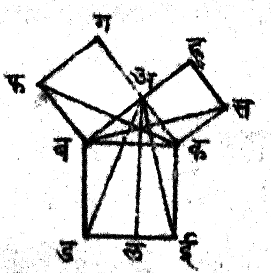
अड ह्या चारबाजू परस्पर बरोबर आहेत, ह्यास्तव अबईड समांतरभुज चौकोन समभुज आहे. ह्याचे चारही कोन काटकोन आहेत, कारण अड बाजू अब आणि डई ह्या दोन समांतर बाजूंस छेदिते, ह्याकरितां (२९ व्या सि० प्र०) बअड आणि अडई हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर आहेत, परंतु बअड कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां अडई हा कोनही काटकोन आहे. समांतरभुज चौकोनांत समोरासमोरचे कोन बरोबर असतात, ह्याकरितां अबई आणि डईब हेही दोन कोन काटकोन आहेत, ह्याकरितां अडईब ह्या समांतरभुज चौकोनाचे चारही कोन काटकोन आहेत, आणि ह्याच्या चारही बाजू सारख्या आहेत असें सिद्ध केलेंच आहे, ह्याकरितां हा चौरस आहे, आणि तें विवक्षित अब रेषेवर काढलें आहे.

१ कु० समांतरभुज चौकोनांत एक कोन काटकोन असला तर सर्व कोन काटकोन असतात.

४७ सिद्धांत.

काटकोन त्रिकोणांत काटकोना समोरच्या बाजूचा वर्ग त्या त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोनबाजूंच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर असतो.

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे, आणि त्याचा अ कोन काटकोन आहे, त्यास त्या समोरील बक बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजू बअ आणि अक ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



(४६ व्या सि० प्र०) बक बाजूवर बई चौरस काढ, आणि अब आणि अक ह्यांवर बग आणि अस चौरसें काढ. (३१ व्या सि० प्र०) अ बिंदूतून अल रेघ बड शीं किंवा कई शीं समांतर कर, आणि अ, ड अ, ई ब, स आणि क, फ हे बिंदु सांध.

बअक आणि बअग ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोन आहे, ह्या करितां (१४ व्या सि० प्र०)

अक आणि बग ह्या दोन रेघा एके रेघेंत आहेत. कबड कोन अबफ कोनाबरोबर आहे, कारण ते दोन्ही काटकोन आहेत. दोहोंतही अबक कोन मिळीव, तेव्हां (२ऱ्या प्र॰ म॰) सगळा अबड कोन कबफ कोनाबरोबर झाला. अब आणि बड ह्या बाजू अनुक्रमें फब आणि बक ह्या बाजूं बरोबर आहेत, ह्या करितां (४थ्या सि॰ प्र॰) अबड त्रिकोण फबक त्रिकोणाबरोबर आहे. अबड त्रिकोण आणि बल समांतरभुज चौकोन बड पायावर आणि बड आणि अल ह्या समांतर रेघांच्या जोडांत आहेत, ह्या करितां (४१ व्या सि॰ प्र॰) बल समांतरभुज चौकोन अबड त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे, तसेंच फबक त्रिकोण आणि बग चौरस हीं फब पायावर आणि फब आणि गक ह्या दोन समांतर रेघांच्या जोडांत आहेत, ह्या करितां बग चौरस फबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे. अबड त्रिकोण फबक त्रिकोणाबरोबर आहे, ह्या करितां (६ व्या प्र॰ म॰) बल समांतरभुज चौकोन बग चौरसाबरोबर आहे. ह्याप्रमाणें लक समांतरभुज चौकोन कह चौरसाबरोबर

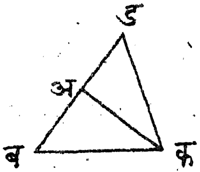
आहे, असें सिद्ध होईल, ह्यास्तव बल आणि कल हे समांतरभुज चौकोन म्हणजे बई चौरस बग आणि कह चौरसांबरोबर आहे, आतां बई चौरस बक बाजूचा वर्ग आहे, आणि बग आणि कह हीं चौरसें अब आणि अक ह्यांचें वर्ग आहेत, ह्या करितां बक बाजूचा वर्ग अब आणि अक ह्या बाजूंच्या वर्गांचे बेरजेबरोबर आहे, हें सिद्ध.

१ कु० काटकोन त्रिकोणांत काटकोनाजवळच्या कोणत्याही बाजूचा वर्ग, कर्ण आणि दुसरी बाजू ह्यांचे वर्गांचे वजाबाकीबरोबर आहे, कारण बके = बअे + अके आणि अके दोन्ही पेक्षांतून काढून टाकिला असतां बके − अके = बअे किंवा बअे काढून टाकिला असतां बके − बअे = अके.

४८ सिद्धांत.

कोणत्याही त्रिकोणाच्या एका बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असल्यास त्या दोन बाजूंच्या मधील कोन काटकोन असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याच्या बक बाजूचा



वर्ग अब आणि अक ह्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर आहे, त्यास बअक कोन काटकोन आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

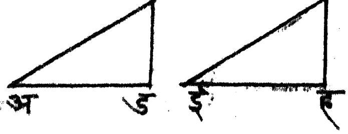
(११ व्या सि० प्र०) अ बिंदूतून अक रेघेवर अड लंब कर, अड रेघ अब रेघेबरोबर कर, आणि ड, क बिंदु सांध अड बाजू अब बाजूबरोबर केली आहे, ह्याकरितां अड चा वर्ग अबचे वर्गाबरोबर आहे. दोन्ही वर्गामध्यें अक चा वर्ग मिळीव, त्यास अडे आणि अके मिळून अबे आणि अके ह्याबरोबर आहेत, पण डअक हा काटकोन आहे, ह्याकरिता (४७ व्या सि० प्र०) डके अड आणि अक, ह्यांचे वर्गाबरोबर आहे, आणि बके, अब आणि अक ह्यांचे वर्गांबरोबर आहे, असें गृहीत आहे, ह्याकरिता डके बके वर्गाबरोबर आहे, ह्यास्तव डक बाजू बक बाजूबरोबर आहे. अडक त्रिकोणाच्या अड, अक, आणि डक ह्या तीन बाजू अबक त्रिकोणाच्या अब, अक, आणि बक ह्या तीन बाजूंची अनुक्रमें बरोबर आहेत,

ह्या करितां हे दोन त्रिकोण (८व्या सि० म०) एक - रूप आहेत, म्हणून ड अ क कोन ब अ क कोना- बरोबर आहे, परंतु ड अ क कोन काटकोन आहे, ह्यास्तव ब अ क कोनही काटकोन आहे.

क सिद्धांत.

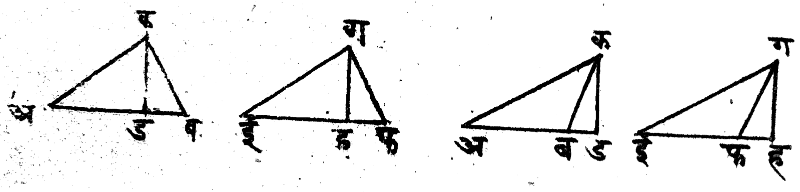
दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू आणि त्या दोहों पैकीं कोणत्याही बाजू समोरील कोन हीं दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि पहिल्या त्रिकोणांत ज्या बाजू समोरील कोन घेतला आहे त्या बाजूच्या बरोब- रीची जी दुसऱ्या त्रिकोणांतील बाजू तिच्या समोरील कोन ह्यांशीं अनुक्रमें बरोबर असल्यास, आणि दोहों त्रिकोणांतील दुसऱ्या ज्या बरोबरीच्या दोन बाजू ह्यां समोरील कोन सजातीय असल्यास ते दोन त्रिकोण स- र्वांशीं एकरूप असतात.

अ ड क त्रिकोणाच्या अ क आणि क ड ह्या दोन बाजू ई ग ह त्रिकोणाच्या ई ग आणि ग ह ह्या दोन बाजू बरोब- र आहेत, अ क आणि



ईग ह्या बाजूं समोरील कोन ड आणि ह हे काट-कोन आहेत, व कड आणि गह ह्या बाजूं समोरील अ आणि ई हे कोन ३२ व्या सिद्धांताची चवथी कुरलरी, आणि १५ वी व्याख्या ह्यावरून सजातीय आहेत, त्यास हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अक बाजू ईग बाजू बरोबर आहे, आणि कड, गह बरोबर आहे, ह्याकरितां अके - कडे = ईगे - गहे, परंतु ४७ व्या सिद्धांताच्या कुरलरीवरून अडे = अके - कडे, आणि ईहे = ईगे - गहे. ह्याकरितां अडे = ईहे आणि ह्यास्तव अड, ईह बरोबर आहे, तेव्हां अकड त्रिकोणाच्या तीन बाजू ईगह त्रिकोणाच्या तीन बाजूंशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, ह्याकरितां (८ व्या सि० प्र०) ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं एकरूप आहेत, म्हणून अ कोन ई कोनाबरोबर आहे, आणि क कोन ग कोनाबरोबर आहे.

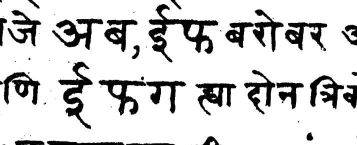


अबक त्रिकोणाच्या अक आणि कब ह्या दोन बाजू ईफग त्रिकोणाच्या ईग आणि गफ ह्या दोन बाजूंबरोबर आहेत, बअक आणि फईग हे कोन समान आहेत व लघु आहेत, आणि दुसऱ्या ज्या बरोबरीच्या बाजू त्यां समोरील अबक आणि ईफग कोन हे दोन्ही लघु आहेत, किंवा विशाळ आहेत, त्यापक्षीं अबक आणि ईफग हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अब आणि ईफ ह्या पायांवर (दुसऱ्या दोन त्रिकोणांत ते वाढवून) कड आणि गह लंब कर, अडक त्रिकोणाचा ड काटकोन ईहग त्रिकोणाच्या ह काटकोनाबरोबर आहे, अ कोन ई कोनाबरोबर आहे, आणि अक बाजू ईग बाजूबरोबर आहे, त्यास (२६ व्या सि० प्र०) अडक आणि ईहग हे दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून कड बाजू गह बाजूबरोबर, व अड बाजू ईह बाजू बरोबर. कडब त्रिकोणाची कब बाजू गहफ त्रिकोणाच्या गफ बाजू बरोबर आहे, कड बाजू गह बाजू बरोबर आहे, व ड काटकोन ह काटकोनाबरोबर आहे, त्यास ते-

दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून ड ब बाजू ह फ बाजूबरोबर आहे. आतां (पहिल्या दोन त्रिकोणांत) अ ड आणि ड ब ह्यांची बेरीज ई ह आणि ह फ ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे, म्हणजे अ ब, ई फ बरोबर आहे. दुसऱ्या दोन त्रिकोणांत अ ड आणि ड ब ह्यांची वजाबाकी ई ह आणि ह फ ह्यांच्या वजाबाकीबरोबर आहे, म्हणजे अ ब, ई फ बरोबर आहे, म्हणून अ ब क आणि ई फ ग ह्या दोन त्रिकोणांत एकाच्या तीन बाजू दुसऱ्याच्या तीन बाजूंबरोबर आहेत, ह्याकरितां ते दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून अ ब क कोन ई फ ग कोनाबरोबर आहे, व अ क ब कोन ई ग फ कोनाबरोबर आहे.

क अ ब आणि ग ई फ हे कोन विशाळ आहेत, त्यापक्षीं क अ ब आणि ग ई फ ह्या दोन त्रिकोणांच्या क आणि ग शिरोबिंदूंपासून क ड आणि ग ह लंब केले असतां ते बाहेरल्या अंगास पडतील. क अ ब कोनाजवळचा जो कोन क अ ड हा (१३ व्या सि॰ कु॰ प्र॰) क अ ब कोनाच्या



बरोबरीचा जो कोन ग ई फ ह्याच्या जवळच्या ग ई ह कोनाबरोबर आहे. ड आणि ह हे कोन काटकोन आहेत, व अ क बाजू ई ग बाजूबरोबर आहे, म्हणून अ ड क आणि ई ह ग हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, व ह्याप्रमाणेंच क ड ब आणि ग ह फ हे त्रिकोणबरोबर आहेत, हें सिद्ध होतें. आतां अ ड, ई ह बरोबर आहे, व ड ब, ह फ बरोबर आहे, ह्यास्तव ड ब − ड अ = ह फ − ह ई म्हणजे अ ब = ई फ, आणि ह्याकारणास्तव अ ब क आणि ई फ ग हे दोन त्रिकोण (८ व्या सि० प्र०) सर्वांशीं एकरूप आहेत.

कु० एक काटकोन त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या तदनुरूप बाजूंशीं अनुक्रमें सारख्या असल्या तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.

पहिल्याबुकाचे प्रश्न.

१ जी रेषा समद्विभुज त्रिकोणाच्या शिरकोना-चे दोन भाग समान करिते ती रेषा पायावर लंब असते व त्याचेही दोन भाग समान करिते.

२ दोन विवक्षित बिंदूपासून सारख्या अंतरावर विवक्षित रेषेंत कोणता बिंदु आहे तो काढावयाचा.

३ एका रेषचे दुसऱ्या रेषेनें तीवर लंब राहून, दोन समान भाग केले असतां लंब रेषेंतील प्रत्येक बिंदु ज्या रेषेचे दोन समान भाग झाले आहेत तिच्या शेवटांपासून सारख्या अंतरावर असतो, आणि जो बिंदु लंबरेषेंत नाहीं तो त्या शेवटांपासून सारख्या अंतरावर नसतो.

४ विवक्षित दोन बिंदूस सांधणाऱ्या रेषेच्या मध्यांतून एक रेषा काढिली असतां त्या रेषेंत मध्यापासून सारखे अंतरांवर जे दोन बिंदु असतील ते विवक्षित दोनबिंदूपासून सारखे अंतरांवर असतील.

५ विवक्षितबिंदूपासून विवक्षित रेषेवर ज्या काय रेषा काढतां येतील त्या सर्वांमध्यें जी रेषा विवक्षितरेषेवर लंब होईल तीच रेषा सर्वरेषांमध्यें ला-

हान होईल. इतर रेषांपैकीं लंबाच्या समीपतर जी रेषा असेल ती तिच्या पलीकडची जी दूरतर रेषा तीपेक्षां लहान होईल. विवक्षितबिंदूपासून विवक्षित रेषेवर समान अशा दोनच रेषा काढतां येतील, पण त्यांपैकीं एक लंबाच्या उजव्या अंगास व एक लंबाच्या डाव्या अंगास पडेल.

६ त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची वजाबाकी तिसऱ्या बाजूपेक्षां कमी असते.

७ विवक्षित दोनबिंदूंस सांधणाऱ्या रेषेचे समान दोन भाग करणारी अशी एक रेषा काढली आणि ह्या रेषेवर विवक्षित बिंदूंपासून लंब काढिले तर ते बरोबर होतील.

८ कोनाचे दोन समान भाग करणाऱ्या रेषेंतील प्रत्येक बिंदु कोनाच्या बाजूंपासून सारखे अंतरावर असतो.

९ समान अशा दोन समांतर रेषांची व्युत्क्रम शेवटें ज्या रेषा सांधितात त्या परस्परांचे दोन समान भाग करितात.

१० समद्विभुज त्रिकोणाचा शिरकोन काटकोन असल्यास पायाकडील प्रत्येक कोन अर्ध्या काटकोना

बरोबर असतो.

११ समद्विभुज त्रिकोणांत शिरकोनाची बाजू शिरोबिंदूपलीकडे वाढविली असतां बाहेरील अंगास जो कोन पडतो तो पायाकडील प्रत्येक कोनाच्या दुप्पट असतो.

१२ एके त्रिकोणाचा बाहेरील कोन आणि आंतील पलीकडचा एक कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या त्या कोनांच्या दुप्पट असल्यास पहिल्या त्रिकोणाचा दुसरा आंतील पलीकडचा कोन दुसरे त्रिकोणाच्या दुसरे आंतील पलीकडच्या कोनाचे दुप्पट आहे.

१३ विवक्षित बिंदूंतून विवक्षित दोन समांतर रेषांस छेदणारी एक रेषा अशी करावयाची आहे, कीं त्या दोन रेषांत जो तिचा भाग सांपडेल तो विवक्षित रेषे बरोबर होईल.

१४ विवक्षित बिंदूंतून विवक्षित रेषांस छेदून जाणारी अशी एक रेष करावयाची आहे, कीं तिचा कल त्या दोन्ही रेषांकडे सारखा राहील, म्हणजे ती रेषा त्या दोन्ही रेषांशीं कोन समान करील.

१५ परस्परांस छेदणाऱ्या दोन रेषा दुसऱ्या दोन परस्परांस छेदणाऱ्या रेषांशीं अनुक्रमें समांतर अस-

ल्या तर प्रथम दोन रेघांतील कोन दुसरे दोन रेघां-
तील कोनाबरोबर असतो.

१६ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज पायाचा म-
ध्य आणि शिरकोन ह्यांस सांधणाऱ्या रेघेच्या दुपटी-
पेक्षां मोठी असते.

१७ काटकोण त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू ह्यां-
ची बेरीज किंवा वजाबाकी व तिसरी बाजू इतकें
सांगितलें असतां काटकोन त्रिकोण काढावया-
चा.

१८ दोन विवक्षित रेघा आहेत व त्यांच्या मध्यें
एक विवक्षित बिंदु आहे, त्यास त्या बिंदूतून त्या दो-
न रेघांस छेदून जाणारी अशी एक रेघ काढावयाची
आहे, कीं तिचा जो भाग त्या दोन रेघांच्यामध्यें सांप-
डेल त्याचे समान दोन भाग त्या विवक्षित बिंदूमध्यें
होतील.

१९ समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायांतील कोणत्या-
ही बिंदूतून दोन्ही बाजूंवर दोन लंब केले असतां
त्यांची बेरीज पायाच्या कोणत्याही शेवटापासून
समोरील बाजूवर लंब केला असतां त्याबरोबर
होते.

२० त्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांचे ज्या रेषा दोन भाग समान करितात त्यांचा छेदनबिंदु आणि शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा शिरकोनाचे दोन भाग समान करिते.

२१ समभुजत्रिकोणामध्यें कोठेंही बिंदु घेऊन त्यापासून तिन्ही बाजूंवर लंब केले असतां त्यांची बेरीज समभुजत्रिकोणाच्या कोणत्या तरी कोनापासून त्याच्या समोरील बाजूवर लंब केला असतां त्या बरोबर होते.

२२ त्रिकोणाचा शिरकोन विशाळ असल्यास शिरोबिंदु आणि पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा पायाच्या अर्धापेक्षां कमी असते. शिर कोन काटकोन असल्यास शिरोबिंदु आणि पायाचा मध्य ह्यांस सांधणारी रेषा पायाच्या अर्धाबरोबर असते. शिर-कोन लघु असल्यास ती रेषा पायाच्या अर्धापेक्षां ज्यास्त असते.

२३ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंवर त्यांचे समान दोनभाग करणारे असे लंब केले आणि त्यांच्या छेदनबिंदूपासून तिसरे बाजूवर लंब केला तर तो तिचे दोनभाग समान करतो.

२४ त्रिकोणाच्या शिरकोनापासून पायावर लंब केला असतां व शिरकोनाचे दोन समान भाग करणारी अशी रेघ केली असतां त्या दोन रेघांच्यामध्यें जो कोन सांपडतो तो पायाकडील कोनांच्या वजाबाकीच्या अर्धा बरोबर होतो.

२५ विवक्षित रेघेंत असा एक बिंदु काढावयाचा आहे, कीं त्या बिंदूपासून विवक्षित दोन बिंदूपर्यंत रेघा काढल्या असतां जे कोन पडतील ते सारखे होतील.

२६ त्रिकोणाच्या बाजूंची बेरीज व पायाकडील कोन इतकें सांगितलें आहे, त्यापासून त्रिकोण काढावयाचा.

२७ त्रिकोणाच्या पायाच्या दोन्ही शेवटांपासून त्यांच्या समोरच्या बाजूंचे दोन समान भाग करणाऱ्या अशा रेघा काढल्या आणि त्यांचा छेदन बिंदु आणि शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी रेषा वाढविली तर ती पायाचे दोन भाग समान करते.

२८ एका पायावर व त्याच्या एकेच बाजूस एकांत एक अशा दोन समान बहुकोणाकृति असल्या तर बाहेरील बहुकोणाकृतीच्या बाजूंची परिमिति आं-

नील बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या परिमितीपेक्षां मोठी होईल.

Kakajee Gopal Josee

बूकदुसरें.

व्याख्या

१ ज्या बिंदूमध्यें रेघेचा छेद होतो त्यास छेदनबिंदु असें म्हणतात.

२ छेदनबिंदूपासून रेघेच्या मध्यापर्यंत जें अंतर त्यास मध्यांतर असें म्हणतात.

३ छेदनबिंदु रेघेच्या टोंकांच्यामध्यें असल्यास रेघेचा छेद आंतल्या अंगानें झाला असें म्हणतात, व तो बिंदु एका टोंकापलीकडे असल्यास रेघेचा छेद बाहेरील अंगानें झाला असें म्हणतात.

४ रेघेच्या छेदनबिंदूपासून तिचे टोंकापर्यंत जीं अंतरें त्यांस तिचे खंड असें म्हणतात.

५ दोन रेघांचा काटकोन म्हणजे ज्याच्या जवळच्या बाजू त्या दोन रेघा किंवा त्यांच्या बरोबरीच्या रेघा असतात तो होय.

कोणतेही दोन रेघांचा जसें अब आणि बक ह्यांचा काटकोनचौकोन कधीं कधीं अब·बक असा लिहितात, तसेंच अ आणि ब ह्या दोन रेघा असल्यास त्यांचा काटकोनचौकोन अ·ब असा लिहितात, अ आणि ब मिळून

एक रेघ असली, व क एक रेघ असली तर त्यांचा काटकोनचौकोन (अ+ब) क असा लिहितात. अ आणि ब ह्यांच्या वजाबाकीबरोबर एक रेघ असली, व क एक रेघ असली तर त्यांचा काटकोनचौकोन (अ—ब) क असा लिहितात. अ+ब बरोबर एक रेघ असली व अ—ब बरोबर एक रेघ असली तर त्यांचा काटकोनचौकोन (अ+ब) (अ—ब) असा लिहितात.

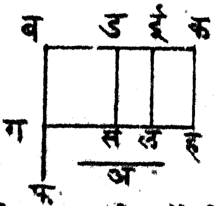
६ ज्या रेघेचे असे दोन खंड होतात, कीं सगळी रेघ व एक खंड ह्यांचा काटकोनचौकोन दुसऱ्या खंडाचे वर्गाबरोबर होतो त्या रेघेचें छेदनमध्यप्रमाणानें किंवा मध्यप्रमाणांत झालें असें म्हणतात.

दुसरें बूक

१ सिद्धांत.

दोन रेघांपैकीं एकीचे कितीही भाग केले असतां त्या दोन रेघांचा काटकोन चौकोन अखंड रेघ, आणि छिन्न रेघेचे भाग ह्यांच्या काटकोन चौकोनांच्या बेरजे बरोबर होतो.

अ आणि बक ह्या दोन रेघा आहेत. त्यांपैकीं बकचे बड, डई, आणि ईक असे भाग केले आहेत, त्यास अ आणि बक ह्यांचा काटकोन चौकोन, अ आणि बड ह्यांचा काटकोन चौकोन, आणि अ आणि डई ह्यांचा काटकोन चौकोन, आणि अ आणि ईक ह्यांचा काटकोन चौकोन ह्या सर्वांच्या बेरजे बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



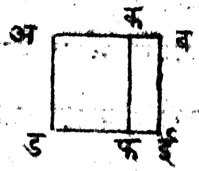
ब बिंदूतून बक रेघेवर (१ बू. ११ व्या सि० प्र०) बफ रेघ लंब कर, आणि (१ बू. ३ ऱ्या सि० प्र०) बग, अ बरोबर कर. (१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) ग बिंदूतून गह रेघ बकशीं समांतर कर, आणि ड, ई, आणि क ह्या बिंदूतून डस, ईल आणि कह ह्या रेघा बग रेघेशीं समांतर कर. आतां बह काटकोन चौकोन बस,

डल आणि ईह ह्या काटकोन चौकोनांबरोबर आहे. बह काटकोन चौकोन बक आणि बग ह्या दोन रेघांनीं झाला आहे, पण बग रेघ, अ बरोबर आहे, ह्याकरितां बह काटकोन चौकोन बक आणि अ ह्या दोन रेघांनीं झाला आहे असें म्हणण्यास चिंता नाहीं. बस काटकोन चौकोन बड आणि बग ह्या दोन रेघांनीं झाला आहे. डल काटकोन चौकोन डई आणि डस ह्या दोन रेघांनीं झाला आहे. तसेंच ईह काटकोन चौकोन ईक आणि ईल ह्या दोन रेघांनीं झाला आहे. (१ बू० ३४ व्या सि० प्र०) डस आणि ईल ह्या दोन रेघा प्रत्येक बग बरोबर आहेत, आणि बग, अ बरोबर आहे, ह्याकरितां बस, डल आणि ईह हे काटकोन चौकोन बड आणि अ, डई आणि अ आणि ईक आणि अ ह्या रेघांनीं झाले आहेत, असें म्हणण्यास काय बाध आहे? तेव्हां ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं अ आणि बक ह्या दोन रेघांचा काटकोन चौकोन अ आणि बड, अ आणि डई, व अ आणि ईक ह्या रेघांच्या काटकोन चौकोनांबरोबर आहे.

२ सिद्धांत प्रमेय

रेघेचे कसेही दोन भाग केले असतां ते भाग आणि सर्व रेघ ह्यांच्या काटकोन चौकोनांची बेरीज त्या रेघेच्या वर्गाबरोबर असते.

अब एक सरळ रेघ आहे. हिचे क स्थळीं अक आणि बक असे दोन भाग केले आहेत, त्यास अब आणि अक ह्यांचा काटकोन चौकोन व अब आणि बक ह्यांचा काटकोन चौकोन ह्यांची बेरीज अबच्या वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



अब रेघेवर (१ बू. ४८च्या सि. त्र.) अडईब चौरस काढ, आणि (१ बू. ३१ व्या सि. त्र.) क बिंदूतून कफ रेघ अडशीं किंवा बईशीं समांतर कर.

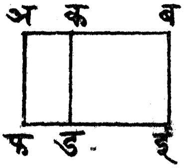
अई चौरस अफ आणि कई ह्या दोन काटकोन चौकोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. अई आकृति अब रेघेचा वर्ग आहे. अफ काटकोनचौकोन अक

आणि अड ह्या रेघांनीं झाला आहे; तसेंच कई काटकोनचौकोन बक आणि कफ ह्या रेघांनीं झाला आहे; परंतु अड, कफ बरोबर आहे, आणि अड, अब बरोबर आहे, ह्याकरितां अड आणि कफ ह्या दोन रेघा अब बरोबर आहेत, ह्यास्तव अफ आणि कई हे दोन काटकोनचौकोन अक आणि अब, बक आणि अब ह्या रेघांनीं झाले आहेत असें म्हणण्यास चिंता नाहीं, ह्यास्तव अब रेघेचा वर्ग अब आणि अक ह्यांचा काटकोनचौकान व अब आणि बक ह्यांचा काटकोनचौकोन ह्या दोहोंचें बेरजे बरोबर आहे.

३ सिद्धांत प्रमेय.

रेघेचे कसेही दोन भाग केले असतां सगळी रेघ व दोहों पैकीं कोणताही एकभाग ह्यांचा काटकोनचौकोन, दोनभागांचा काटकोनचौकोन व पूर्वीं घेतलेल्या भागाच्या वर्ग ह्यांच्या बेरजे बरोबर होतो.

अब रेघेचे क स्थळीं अक आणि बक असे दोन भाग केले आहेत, त्यास अब आणि बक ह्यांचा काटकोनचौकोन अक आणि बक ह्यां-



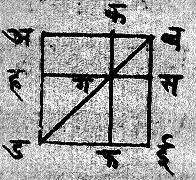
चा काटकोनचौकोन व बक चा वर्ग ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

बक रेघेवर (१ बु० ४६ व्या सि० प्र०) कडईब चौरस कर, ईड बाजू फ बिंदूपर्यंत वाढीव, आणि अ बिंदूतून (१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) अफ रेघ कडशीं किंवा बईशीं समांतर कर. अई काटकोनचौकोन अड आणि कई ह्या दोन आकृतींचे बेरजेबरोबर आहे. अई काटकोनचौकोन अब आणि बई ह्या रेघांनीं झाला आहे, परंतु बई रेघ बक बरोबर आहे, ह्याकरितां अई काटकोनचौकोन अब आणि बक ह्या दोन रेघांनीं झाला आहे. अड काटकोनचौकोन अक आणि कड ह्या दोन रेघांनीं झाला आहे, परंतु कड, बक बरोबर आहे, ह्याकरितां अड काटकोनचौकोन अक आणि बक ह्या रेघांनीं झाला आहे, असें म्हणण्यास चिंता नाहीं. कई आकृति बकचा वर्ग आहे; ह्याकरितां, अब · बक = अक · बक + बक^2.

४ सिद्धांत प्रमेय.

कोणत्याही रेघेचे दोन भाग केले असतां त्या रेघेचा वर्ग दोनभागांचे वर्ग आणि त्या दोन भागांच्या काटकोन चौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे.

अब एक रेघ आहे. तिचे क बिंदूंत दोनभाग केले आहेत, त्यास अबचा वर्ग, अक आणि बक ह्यांचे वर्ग व अक आणि बक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



(१ बू० ४६व्या सि० प्र०) अब रेघेवर अई चौरस काढ, आणि ब,ड बिंदु सांध. (१ बू० ३१व्या सि० प्र०) क बिंदूतून कगफ रेघ बई शीं किंवा अडशीं समांतर काढ, आणि ग बिंदूतून हगस रेघ अबशीं किंवा डईशीं समांतर काढ. आतां अड आणि कफ ह्या दोन समांतर रेघांवर बड रेघ पडते, त्याकरितां (१ बू० २९व्या सि० प्र०) कगब बाह्यकोन अडब कोनाबरोबर आहे,

अड आणि अब ह्या दोन बाजू चौरसाच्या आहेत, ह्याकरितां त्या परस्परबरोबर आहेत, म्हणून (१ बू० ५ व्या सि० प्र०) अडब कोन अबड कोनाबरोबर आहे, म्हणून कगब कोन कबग कोनाबरोबर आहे, आणि ह्यास्तव (१ बू० ६ व्या सि० प्र०) कग बाजू कब बाजूबरोबर आहे. (१ बू० ३४ व्या सि० प्र०) कग बाजू बस बाजू बरोबर आहे आणि कब बाजू गस बाजूबरोबर आहे, ह्याकरितां कगसब समांतरभुजचौकोन समभुज आहे, व त्याचा ब कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू० ४६ व्या सि० प्र०) त्याचे चारही कोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव तो चौरस आहे, आणि तो चौरस बक बाजूवर काढला आहे. हफ आकृतिही चौरस आहे, आणि हा चौरस अक च्याबरोबरीच्या हग बाजूवर काढला आहे, हे ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, ह्यास्तव कस आणि हफ ह्या आकृति बक आणि अक ह्यांचे वर्ग होत. (१ बू० ४२ व्या सि० प्र०) अग काटकोनचौकोन गई काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, आणि अग काटकोनचौकोन अक आणि कग ह्या बाजूंनीं झाला आहे, म्हणजे अक आणि

बक ह्या बाजूंनीं झाला आहे. अग काटकोनचौकोन गई काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अग, गई हे काटकोनचौकोन अक आणि बक ह्या दोन रेघांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुप्पटी बरोबर आहेत. हफ आणि कस हे अक आणि बक ह्या रेघांचे वर्ग आहेत, ह्याकरितां हफ, कस, अग आणि गई ह्या चार आकृति अक आणि बक ह्यांचे वर्ग, व अक आणि बक ह्यांचे काटकोनचौकानाची दुप्पट ह्यांबरोबर आहेत. ह्या चार आकृती मिळून अई आकृति होते, पण अई आकृति अब चा वर्ग आहे, ह्याकरितां $\text{अब}^2 = \text{अक}^2 + \text{बक}^2 + २\,\text{अक} \times \text{बक}$.

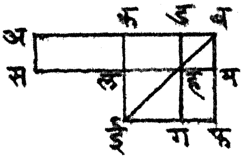
कुरलरी. ह्यासिद्धांतावरून असें स्पष्ट दिसून येतें, कीं चौरसांत ज्या समांतरभुजचौकोनांतून कर्ण जातो तेही चौरस असतात.

५ सिद्धांत प्रमेय.

कोणत्याही रेघेचे दोन समान व दोन असमान असे भाग केले असतां असमान भागांच्या काटकोनचौकोन व छेदन बिंदूंतील अंतराचा वर्गही रेघेच्या अर्धा

च्या वर्गाबरोबर असतात.

अब रेषेचे अक आणि बक हे दोन समान भाग क बिंदूत केले आहेत, आणि ड बिंदूत अड आणि बड हे दोन असमान भाग केले आहेत,



त्यास अड आणि बड ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि कड चा वर्ग हीं बकच्या वर्गाबरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

(१ बू० ४६ व्या सि० प्र०) बक रेषेवर बकईफ चौरस कर, आणि ई, ब बिंदू सांध. ड बिंदूतून (१ बू० ३१ व्या सि० प्र०) डहग रेष कईशीं किंवा बफशीं समांतर कर, ह बिंदूतून सलमरेष अबशीं किंवा ईफ शीं समांतर कर, आणि अ बिंदूतून असरेष कलशीं किंवा बमशीं समांतर कर. (१ बू० ४३ व्या सि० प्र०) कह काटकोनचौकोन हफ काटकोनचौकोनाबरोबर आहे. ह्या दोहोंत डम काटकोनचौकोन मिळीव. तेव्हां कम काटकोनचौकोन डफ काटकोनचौकोनाबरोबर झाला. (१ बू० ३६ व्या सि० प्र०) अल काटकोनचौकोन

क म काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, कारण अ क पाया ब क पायाबरोबर आहे, आणि ह्यास्तव अ ल काटकोनचौकोन ही ड फ बरोबर आहे. ह्या दोहोंत क ह काटकोनचौकोन मिळीव, तेव्हां अ ह काटकोनचौकोन क म ग आकृतीबरोबर झाला. अ ह काटकोनचौकोन अ ड आणि ब ड ह्या रेषांनीं झाला आहे, कारण ब ड, ड ह बरोबर आहे. ह्याकरितां अ ड. ब ड काटकोनचौकोन क म ग आकृती बरोबर आहे.

ह्या दोन्ही पैक्यांत ल ग मिळीव. ल ग, क ड चे वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ ड आणि ब ड ह्यांचा काटकोनचौकोन व क ड चा वर्ग हीं क म ग व ल ग ह्या आकृतींबरोबर आहेत. पण क म ग आणि ल ग ह्या आकृती मिळून सर्व आकृति क फ होते, आणि क फ, क ब चा वर्ग आहे, ह्याकरितां अ ड आणि ब ड ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि क ड चा वर्ग हीं क ब च्या वर्गाबरोबर आहेत, हें सिद्ध.

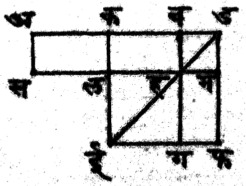
१ कु. ब क आणि क ड ह्या दोन विषम रेषांच्या वर्गांची वजाबाकी, त्या दोन रेषांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांचा काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, हें ह्या सिद्धांतावरून स्पष्ट दिसून येते, कारण, ब के =

अड • बड + कड^2, कड^2 ह्या दोन्ही पक्ष्यांतून वजा केला असतां बक^2 − कड^2 = अड • बड = (बक + कड) (बक − कड), कारण, बक + कड = अक + कड = अड.

६ सिद्धांत. प्रमेय.

कोणत्याही रेषेचे समान दोन भाग करून ती पुढें वाढविली असतां वाढविलेला भाग व वाढविलेल्या भागासहित सर्व रेष ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि अर्धरेषेचा वर्ग ह्यांची बेरीज अर्धी रेष व वाढविलेला भाग ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाबरोबर होते.

अब रेषेचे क बिंदूत दोन समान भाग केले आहेत, आणि ती ड पर्यंत वाढविली आहे, त्यास अड आणि बड ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि कब च्या वर्ग ह्यांची बेरीज कड च्या वर्गाबरोबर आहे,



म्हणजे अड • बड + कब^2 = कड^2.

(१ बू• ४६ व्या सि• प्र•) कड रेषेवर कफ चौरस कर आणि ड, ई बिंदू सांध. (१ बू• ३)

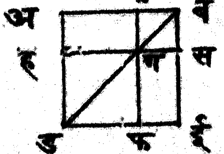
व्या सि० प्र०) बहग रेघ डफशीं किंवा कईशीं समांतर कर, ह बिंदूतून सलम रेघ अडशीं किंवा ईफशीं समांतर कर, आणि अ बिंदूतून अस रेघ कलशीं किंवा डम शीं समांतर कर. अक, कब बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू० ३६ व्या सि० प्र०) अल काटकोनचौकोन कह बरोबर आहे, परंतु (१ बू० ४२ व्या सि० प्र०) कह, हफ बरोबर आहे, ह्याकरितां अल ही हफ बरोबर आहे. ह्या दोहोंमध्यें कम मिळीव. तेव्हां अम काटकोनचौकोन, कमग आकृतीबरोबर झाला. अम काटकोनचौकोन अड आणि बड ह्या रेघांनीं झाला आहे, कारण (२ बू० ४ थ्या सि० कु० प्र०) मड, बड बरोबर आहे. अड आणि बड ह्यांचा काटकोनचौकोन कमग आकृतीबरोबर आहे. ह्या दोन्ही पेक्ष्यांत लग आकृति मिळीव. लग आकृति कब च्या वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरितां अड आणि बड ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि कब चा वर्ग ह्यांची बेरीज कमग आणि लग ह्या आकृतींचे बेरजेबरोबर आहे कमग आणि लग ह्यांची बेरीज कफ आकृति होते, व कफ आकृति कड चा वर्ग आहे, ह्याकरितां अड-

बड काटकोनचौकोन व कब चा वर्ग ह्यांची बेरीज कड च्या वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

७ सिद्धांत. प्रमेय.

रेघेचे दोन भाग केले असतां सर्व रेघ आणि तिचा कोणता तरी एकभाग ह्यांच्या वर्गाची बेरीज, सर्व रेघ आणि तोच भाग ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व दुसऱ्या भागाचा वर्ग ह्यांचे बेरजेबरोबर होतें.

अब रेघचे क बिंदूत दोन भाग केले आहेत. त्यास अब आणि बक ह्यांच्या वर्गाचीबेरीज अब आणि बक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि अक चा वर्ग ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे.



(१ बू॰ ४६ व्या सि॰ प्र॰) अब रेघेवर अई चौरस कर, आणि सर्व आकृति मागील सिद्धांतामध्यें केली आहे त्याप्रमाणें कर. (१ बू॰ ४२ व्या सि॰ प्र॰) अग, गई बरोबर आहे. दोहोंपेक्षांत कस मिळव, तेव्हां अस, कई बरोबर झाला, ह्याकरितां अस आणि

कई हे दोन काटकोनचौकोन मिळून अस काट-कोनचौकोनाच्या दुप्पट आहेत, परंतु अस, आणि कई हे असफ आकृति व कस चौरस ह्यांबरोबर आहेत, ह्याकरितां अस काटकोनचौकोनाची दुप्पट असफ आकृति व कस चौरस ह्यांबरोबर आहे. अस काटकोनचौकोन अब आणि बक, ह्या रेघांनीं झाला आहे, कारण (२ बु० ४ थ्या सि० कु० म०) बस, बक बरोबर आहे, ह्यास्तव अब० बक काट-कोनचौकोनाची दुप्पट असफ आणि कस ह्यांब-रोबर आहे. दोहीं पेक्षांत हफ चौरस मिळीव. हफ चौरस अक रेघेच्या वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरि-तां असफ आकृति कस आणि हफ हीं सर्व अब० बक काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि अक ह्यां बरोबर आहेत, परंतु असफ आणि हफ हीं दो-न्ही मिळून अबईड आकृति होते, ह्याकरितां अ-बईड आणि कस, अब० कब काटकोनचौको-नाची दुप्पट आणि अकचा वर्ग ह्यांबरोबर आहेत, परंतु अबईड आणि कस ह्या आकृति अब आणि बक ह्यांचे वर्ग आहेत, ह्याकरितां अब आणि ब-क ह्यांचे वर्गांची बेरीज अब० बक काटकोनचौ-कोनाची दुप्पट आणि अक ह्यांबरोबर आहेत.

दुसरा प्रकार.

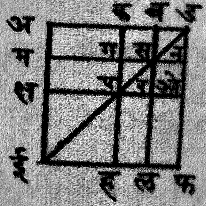
अब चा वर्ग, अक आणि बक ह्या भागांचे वर्ग आणि त्यांच्याच काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यांबरोबर आहे, दोन्ही पक्ष्यांत $बक^{२}$ मिळीव. तेव्हां $अब^{२} + बक^{२} = अक^{२} + २ अक \cdot बक + २ बक^{२}$. परंतु (२ सू॰ ३ऱ्या सि॰ प्र॰) अब॰बक काटकोनचौकोन अक॰बक काटकोनचौकोन आणि $बक^{२}$ ह्यांबरोबर आहे, ह्याकरितां अक॰बक काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि बक वर्गाची दुप्पट ही अब॰बक काटकोनचौकोनाच्या दुप्पट आहेत, ह्यास्तव अब आणि बक ह्यांच्या वर्गांची बेरीज, अब॰बक काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि अक च्या वर्ग ह्यांबरोबर आहे, हें सिद्ध.

कु॰ ह्यापासून निघतें, कीं दोन रेघांच्या वर्गांची बेरीज त्याच दोन रेघांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि त्यांच्या वजाबाकीचा वर्ग ह्यांबरोबर असते.

८ सिद्धांत. प्रमेय.

रेघेचे कसेही दोन भाग केले असतां सर्व रेघ आणि कोणतातरी एकभाग ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची चौपट, आणि दुसऱ्या भागाचा वर्ग, ह्यांची बेरीज सर्व रेघ व प्रथमतः घेतलेला भाग ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाबरोबर होते.

अब एक सरळ रेघ आहे. तिचे क स्थळीं दोनभाग केले आहेत,



त्यास अब • बक काटकोन चौकोनाची चौपट आणि अक चा वर्ग ह्यांची बेरीज अब आणि बक ह्यांच्या बेरजेच्या वर्गाबरोबर आहे.

अब रेघ ड पर्यंत वाढीव, अशी, कीं बड, बक बरोबर होईल. नंतर अड रेघेवर (१ बू• ४६ व्या सि• प्र•) अईफड चौरस कर, आणि ई,ड बिंदु सांध. नंतर (१ बू• ३१ व्या सि• प्र•) क, आणि ब ह्याबिंदूतून कपह आणि बसल ह्या दोन रेघा अईशीं किंवा डफशीं समांतर कर, आणि

स आणि प बिंदूंतून मगन आणि क्षरओ ह्या दोन रेषा अड शीं किंवा ईफ शीं समांतर कर. कब, बड बरोबर आहे, आणि (१ बु० ३४ व्या सि० प्र०) कब, गस, बरोबर आहे, आणि बड, सन बरोबर आहे, ह्या करितां गस सन बरोबर आहे, ह्यारीतीनेंच पर, रओ बरोबर आहे. कब, बड बरोबर आहे, आणि गस, सन बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बु० ३६ व्या सि० प्र०) कस काटकोन चौकोन, बन काटकोन चौकोना बरोबर आहे, व गर काटकोन चौकोन सओ काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, परंतु कओ समांतरभुज चौकोनांत कस आणि सओ हे भरतीचे समांतरभुज चौकोन आहेत, ह्या करितां (१ बु० ४३ व्या सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून बन, गर बरोबर आहे. तेव्हां हे चारही काटकोन चौकोन परस्पर बरोबर आहेत, आणि ह्या करितां हे कस काटकोन चौकोनाच्या चौपट आहेत, असें म्हणण्यास चिंता नाहीं.

कब, बड बरोबर आहे, आणि (२ बु० ४ व्या सि० कु० प्र०) बड, बस बरोबर आहे, आणि

बस, कग बरोबर आहे, ह्याकरितां कब, कग बरोबर आहे. कब रेघ गस बरोबर आहे, आणि गस, गप बरोबर आहे, ह्याकरितां कब रेघ गप बरोबर आहे. कब, कग बरोबर आहे, म्हणून कग, गप बरोबर आहे, ह्याकरितां अग काटकोन चौकोन मप काटकोन चौकोना बरोबर आहे. पर, रओ बरोबर आहे, ह्याकरितां पल, रफ बरोबर आहे. मल समांतरभुज चौकोनांत मप आणि पल हे भरतीचे समांतरभुज चौकोन आहेत, म्हणून (१ बू० ४३ व्या सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आहेत, आणि ह्यास्तव अग, रफ बरोबर आहे, ह्यावरून असें झालें कीं अग, मप, पल, आणि रफ हे चार काटकोन चौकोन परस्परांशीं बरोबर आहेत, आणि हे सर्व अग काटकोन चौकोनाच्या चौपट आहेत. कस, बन, गर, आणि रन हे कस च्या चौपट आहेत, असें पूर्वी सिद्ध केलें, ह्याकरितां हे आठ काटकोन चौकोन अस काटकोन चौकोनाच्या चौपट आहेत, आणि ते अओह ह्या आकृती बरोबर आहेत, ह्याकरितां अओह ही आकृति अस काटकोन चौकोनाच्या चौपट आहे.

अस काटकोन चौकोन अब आणि बक

ह्या रेघांनीं झाला आहे, कारण बस, बक बरोबर आहे, पण अ ओ ह ही आकृति अ स च्या चौपट आहे, असें सिद्ध केलें आहे, ह्यास्तव अब ० बक काटकोनचौकोनाच्या चौपट अओह आकृति आहे. दोन्हीपेक्ष्यांत क्ष ह चौरस मिळीव. क्ष ह चौरस अ क च्या वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरितां अब ० बक काटकोन-चौकोनाची चौपट आणि अ क चा वर्ग ह्यांची बेरीज अ ओ ह आकृति आणि क्ष ह चौरस ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे. अ ओ ह आणि क्ष ह मिळून अ ई फ ड आकृति होते, आणि ती अ ड-चा वर्ग आहे, ह्याकरितां अ ब ० बक काटकोन चौकोनाची चौपट आणि अ क चा वर्ग, हीं अड म्हणजे अ ब आणि ब क ह्यांची बेरीज हिचे वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

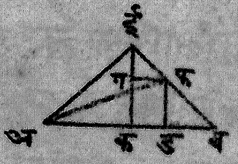
१ कु० अड, अब आणि ब क ह्यांची बेरीज आहे, आणि अक ह्यांची वजाबाकी आहे, ह्याकरितां ह्या सिद्धांतापासून असें निघतें, कीं दोन रेघांच्या काटकोनचौकोनाची चौपट आणि त्यांच्या वजाबाकीचा वर्गही त्या दोन रेघांच्या बेरजेच्या वर्गाबरोबर असतात.

२ कु० कड चें चौरस कब चे चौरसाच्या चौपट आहे, ह्यावरून स्पष्ट दिसून येतें, कीं कोणत्याही रेषेचा वर्ग तिच्या अर्धाच्या वर्गाच्या चौपट असतो.

९ सिद्धांत. प्रमेय.

कोणत्याही रेषेचे दोन समान व दोन असमान भाग केले असतां त्या दोन असमान भागांच्या वर्गांची बेरीज रेषेच्या अर्धाच्या वर्गाची दुप्पट आणि छेदनबिंदूंतील अंतर ह्यांचे वर्गाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर होते.

अब रेषेचे क बिंदूंत अक आणि बक असे दोन समान भाग केले आहेत, व ड बिंदूंत अड आणि बड असे दोन असमान भाग केले आहेत,



त्यास अड आणि बड ह्या दोन भागांच्या वर्गांची बेरीज अक आणि कड ह्यांचे वर्गांच्या दुपटी बरोबर आहे, म्हणजे $अड^2 + बड^2 = २अक^2 + २कड^2$.

(१ पु० ११ व्या सि० प्र०) क बिंदूंतून

अब रेषेवर कई लंब काढ, आणि कई; अक बरोबर किंवा बक बरोबर कर. अ,ई आणि ब, ई बिंदू सांध. (१ बू० ३१ व्या सि० प्र०) ड बिं-दूंतून डफ रेघ कईशीं समांतर काढ. फ बिंदू-तून फग रेघ अबशीं समांतर काढ, आणि अ,फ बिंदू सांध.

अक आणि कई बरोबर आहेत, ह्याकरि-तां (१ बू० ५ व्या सि० प्र०) कअई कोन क-ईअ कोनाबरोबर आहे. पण अकई कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां कअई आणि कई-अ मिळून (१ बू० ३२ व्या सि० प्र०) एक काट-कोन आहे, परंतु ते परस्परबरोबर आहेत, ह्याक-रितां त्यांपैकीं प्रत्येक अर्धा काटकोन आहे, आणि ह्याच कारणास्तव बईक आणि कबई ह्यांपैकी प्रत्येककोन अर्धा काटकोन आहे, म्हणून अई-ब शिरकोन काटकोन आहे. गफ आणि अब ह्या दोन समांतर रेघांवर कई पडते, त्यास (१ बू० २९ व्या सि० प्र०) ईगफ बाह्यकोन ग-कब काटकोनाबरोबर आहे. गईफ अर्धाका-टकोन आहे, आणि ईगफ काटकोन, आहे असें

आतांच दाखविलें, ह्याकरितां ईगफ त्रिकोणाचा तिसरा ईफग हा अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बू० ५ व्या सि० प्र०) गई बाजू गफ बाजू बरोबर आहे. फडब त्रिकोणाचा फडब कोन (१ बू० २९ व्या सि० प्र०) गकब काटकोनाबरोबर आहे, आणि ईबक कोन अर्धा काटकोन आहे, ह्याकरितां डफब कोन अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव डफ बाजू डब बाजू बरोबर आहे. अक रेघ कई रेघेबरोबर आहे. ह्याकरितां अके आणि कई बरोबर आहेत, म्हणून अके ची दुप्पट अके आणि कई ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे. अकई कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अई, अके आणि कई ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे. परंतु अके आणि कई मिळून अके ची दुप्पट आहे, ह्याकरितां अई, अके ची दुप्पट आहे. तसेंच ईग, फग बरोबर आहे, ह्यास्तव ईगे, फगे बरोबर आहे, म्हणून फगे ची दुप्पट, ईगे आणि फगे ह्यांबरोबर आहे. ईगफ कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) ईफे, ईगे आणि फगे ह्यांच्या

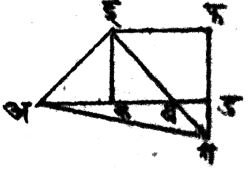
बेरजेबरोबर आहे. फग (१ बू० ३४ व्या सि० प्र०) कड बरोबर आहे, ह्याकरितां ईफे, कडे-च्या दुपटीबरोबर आहे. अईफ कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां अई आणि ईफे मिळून अफे. बरोबर आहेत. अई, अके ची दुप्पट आहे, आणि ईफे, कडे ची दुप्पट आहे, ह्याकरितां अफे, अके ची दुप्पट आणि कडे ची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. अडफ कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अफे, अडे आणि फडे ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे, परंतु फड, बड बरोबर आहे, ह्याकरितां अफे, अडे आणि बडे ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे. अफे, अके-ची दुप्पट आणि कडे ची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे, म्हणून अडे आणि बडे मिळून अके ची दुप्पट आणि कडे ची दुप्पट ह्यांचे बेरजे बरोबर आहे, हें सिद्ध.

१० सिद्धांत. प्रमेय.

एके रेषेचे दोन समान भाग करून ती पुढें वाढविली असतां एकंदर रेषेचा वर्ग आणि वाढविलेल्या

भागाचा वर्ग ह्यांची बेरीज रेघेच्या अर्धाच्या वर्गाची दुप्पट आणि अर्धी रेघ आणि वाढविलेला भाग मिळून जी रेघ होईल तिच्या वर्गाची दुप्पट ह्यांच्या बेरजेबरोबर होते.

अ ब रेघेचे क स्थळीं दोन समान भाग करून ती ड बिंदूपर्यंत वाढविली आहे, त्यास अ-ड चा वर्ग आणि ब ड चा वर्ग ह्यांची बेरीज अ क आणि क ड ह्यांच्या वर्गांच्या दुप्पटीबरोबर आहे.



क बिंदूतून (१ बू॰ ११ व्या सि॰ प्र॰) अ ब रेघेवर क ई लंब कर, क ई, अ क किंवा ब क बरोबर कर, आणि अ, ई आणि ब, ई बिंदू सांध. (१ बू॰ ३१ व्या सि॰ प्र॰) ई बिंदूतून ई फ रेघ अ ड शीं समांतर कर, आणि ड बिंदूतून ड फ रेघ क ई शीं समांतर कर. फ ई रेघ क ई आणि फ ड ह्या दोन समांतर रेघांस छेदिते, ह्यास्तव आंतील क-ई फ आणि ई फ ड हे दोन कोन (१ बू॰ २९ व्या सि॰ प्र॰) दोन काटकोनां बरोबर आहेत, त्यास ब ई फ आणि ई फ ड हे दोन कोन दोन काट

कोनांपेक्षां कमी आहेत हें स्पष्ट आहे. (१ बु० २९ व्या सि० १ कु० प्र०) ईब आणि फड ह्या दोन रेघा पुरतेपणीं वाढविल्या असतां मिळतील. त्या ग बिंदूंत मिळतात असें मानूं. अ,ग बिंदू सांध.

अक, कई बरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बु० ५ व्या सि० प्र०) कअई कोन कईअ कोनाबरोबर आहे, पण अकई कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) कअई आणि अईक ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोन अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहे. ह्याप्रमाणेंच कबई कोन व कईब कोन हे प्रत्येक अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहेत, ह्यास्तव अईब शिरकोन काटकोन आहे. ईग आणि कड ह्या दोन रेघा परस्परांस छेदितात, तेव्हां (१ बु० १५ व्या सि० प्र०) ईबक कोन डबग कोनाबरोबर आहे, परंतु ईबक कोन अर्धा काटकोन आहे, ह्याकरितां डबग कोन अर्धा काटकोन आहे. कई आणि फग ह्या दोन रेघांस कड रेघ छेदिते, त्यास (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) ईकड कोन कडग व्युत्क्रम

कोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव डगब कोन अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बू० ६ व्या सि० प्र०) बड बाजू गड बाजूबरोबर आहे. ईकडफ समांतरभुज चौकोनांत क कोन काटकोन आहे, ह्या करितां त्या समोरील कोन ईफड (१ बू० २४ व्या सि० प्र०) काटकोन आहे. ईफग त्रिकोणाचा फ कोन काटकोन आहे, व फगई कोन अर्धा काटकोन आहे, ह्याकरितां फईग कोन अर्थातच अर्ध्या काटकोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव (१ बू० ६ व्या सि० प्र०) फई बाजू फग बाजूबरोबर आहे. अक बाजू कई बाजू बरोबर आहे, म्हणून अक^2, कई^2 बरोबर आहे, म्हणून अक^2 आणि कई^2 मिळून अक^2 ची दुप्पट आहेत. अकई कोन काटकोन आहे, ह्या करितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अक^2 आणि कई^2 ह्यांची बेरीज अई^2 बरोबर आहे, परंतु अक^2 आणि कई^2, अक^2 ची दुप्पट आहेत, ह्या करितां अई^2, अक^2 ची दुप्पट आहे. फई, फग बरोबर आहे, ह्याकरितां फई^2 फग^2 बरोबर आहे, म्हणून फई^2 आणि फग^2, फई^2 ची दुप्पट आहेत. ईफग कोन काट-

कोन आहे, ह्याकरितां (१ बू॰ ४७ व्या सि॰ प्र॰) ईगे, फई आणि फगे ह्यां बरोबर आहे. फई आणि फगे, ईफे ची दुप्पट आहेत, ह्याकरितां ईगे, ईफे ची दुप्पट आहे. फई आणि कड बरोबर आहेत, ह्याकरितां ईगे, कडे च्या दुप्पट आहे. अईग काटकोन आहे, म्हणून अगे, ईअे आणि ईगे ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे. अई, अके च्या दुप्पट आहे, आणि ईगे, कडे च्या दुप्पट आहे, ह्याकरितां अगे, अक आणि कड ह्यांच्या वर्गांच्या दुप्पट आहे. अगे, अड आणि गड ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, व बड, गड बरोबर आहे, ह्याकरितां अग चा वर्ग अड आणि बड ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, परंतु अग चा वर्ग अक आणि कड ह्यांच्या वर्गांच्या दुपटी बरोबर आहे, असें सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अड आणि बड ह्यांचे वर्ग अक आणि कड त्यांच्या वर्गांच्या दुपटी बरोबर आहेत, हें सिद्ध.

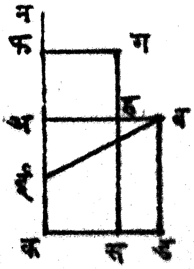
टीप हा व ह्याच्या मागील सिद्धांत ह्यांची सामान्य

प्रतिज्ञा अशी लिहिली असतां चालेल— रेघेचे दोन समान व बाहेरील किंवा आंतील अंगानें दोन असमान असे खंड केले असतां दोन असमान खंडांच्या वर्गांची बेरीज रेघेच्या अर्धाचा वर्ग व मध्यांतराचा वर्ग ह्यांच्या बेरजेचे दुप्पटी बरोबर होते.

११ सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित रेघेस मध्यप्रमाणानें छेदावयाचें.

अब एक रेघ आहे, तीस मध्यप्रमाणानें छेदावयाचें आहे, त्यास अब रेघेवर (१ बू० ४६ व्या सि० प्र०) अकडब चौरस काढ, (१ बू० ४० व्या सि० प्र०) अकरेघेचे ई स्थळीं दोन समानभाग कर, आणि ई, क बिंदू सांध. कअ रेघ भ पर्यंत वाढीव, आणि (१ बू० २ च्या सि० प्र०) ईन-चा ईब बरोबर ईफ तुकडा कर. अफ वर अफगह चौरस कर. अब रेघ ह स्थळीं मध्यप्रमाणानें छेदली आहे, म्हणजे अब आणि बह ह्यांचा काटकोनचौकोन अह चे वर्गाबरोबर



होईल. गह रेघ स पर्यंत वाढीव.

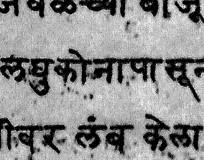
अक चे ई स्थळीं दोन समानभाग केलेआहेत, व ती फ बिंदूपर्यंत वाढविली आहे, म्हणून (२ बू० ६ सि० प्र०) फई चा वर्ग कफ आणि फअ ह्यांचा काटकोनचौकोनव अई चा वर्ग ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे. फई, बई बरोबर केली आहे, ह्याकरितां बई चाही वर्ग कफ आणि फअ ह्यांचा काटकोनचौकोन, व अई चा वर्ग ह्यांबरोबर आहे. (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) बई चा वर्ग अबे आणि अई ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे, ह्यास्तव अबे आणि अई हे कफ आणि फअ ह्यांचा काटकोन चौकोन व अई ह्यांबरोबर आहेत. अई दोन्ही पेक्ष्यांस साधारण आहे, ह्याकरितां तो काढून टाक, तेव्हां अबे, कफ आणि फअ ह्यांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे. अब चा वर्ग अड चौरस आहे, आणि कफ आणि अफ ह्यांचा काटकोनचौकोन फस आहे, कारण फग, अफ बरोबर आहे. दोन्हीपेक्ष्यांत असकाटकोनचौकोन साधारण आहे, हा काढून टाकिला असतां हड काटकोन चौकोन फह चौरसाबरोबर

होईल. ह ड काटकोनचौकान अ ब आणि ह ब ह्या रेषांनी झाला आहे, कारण अ ब, ब ड बरोबर आहे; व फ ह, अ ह चा वर्ग आहे, ह्या करितां अ ब रेघ ह स्थळीं मध्यप्रमाणानें छेदली असे.

१२ सिद्धांत. प्रमेय.

विशालकोण त्रिकोणांत विशालकोना समोरचे बाजूचा वर्ग, विशालकोनाजवळच्या बाजूंच्या वर्गापेक्षां त्या त्रिकोणाच्या एका लघुकोनापासून त्याच्या समोरील बाजू वाढवून तीवर लंब केला असतां तो लंब व विशालकोन ह्यांच्या मधील अंतर व जी बाजू वाढविली ती ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें मोठा असतो.

अ ब क त्रिकोणांत ब क अ कोन विशाल आहे, आणि त्याच्या अ लघुकोनापासून त्याच्या समोरची ब क बाजू वाढवून तीवर अ ड लंब केला आहे, त्यास विशाल



कोना समोरील अ ब बाजू

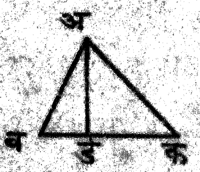
च्या वर्ग बक आणि अक ह्यांच्या वर्गांपेक्षां कब आणि कड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुप्पटीनें मोठा आहे.

बड रेषेचे क स्थळीं दोन भाग झाले आहेत, ह्या करितां (२ बु॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰) बड चा वर्ग बक आणि कड ह्या दोन रेषांचे वर्ग आणि त्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहे. दोन्ही पेक्षांत अड चा वर्ग मिळीव; तेव्हां बड आणि अड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज, बक, कड आणि अड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज व बक आणि डक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहे. अड आणि बड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज (१ बु॰ ४७ व्या सि॰ प्र॰) अबे बरोबर आहे, व कड आणि अड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज अक च्या वर्गाबरोबर आहे, म्हणून अबे, अके, बके आणि बक आणि कड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट, ह्यां बरोबर आहे. म्हणजे अबे, बक आणि अक ह्यांच्या वर्गांपेक्षां बक॰कड काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें मोठा आहे.

१३ सिद्धांत. प्रमेय.

त्रिकोणांत लघुकोना समोरील बाजूचा वर्ग त्याचे जवळच्या दोन बाजूंच्या वर्गांपेक्षां, त्याबाजूंपैकीं कोणत्याही बाजूवर तिच्या समोरीलकोनापासून लंब काढला असतां, तो लंब आणि लघुकोन ह्यांच्या मधील अंतर व ती बाजू ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें लहान असतो.

अ ब क एक त्रिकोण आहे. त्याचा **ब** कोन लघु आहे, व **अ** कोनापासून (१ बु० १२व्या सि० प्र०) **अ ड** रेघ **ब क** वर लंब काढली आहे. त्यांस **ब** कोना समोरचे **अ क** बाजूचा वर्ग **अ ब** आणि **ब क** ह्या बाजूंच्या वर्गांपेक्षां **ब क** आणि **ब ड** ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें कमी आहे.

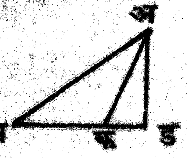


अ ड लंब प्रथमतः **अ ब क** त्रिकोणांत पडतो असें मानूं. **ब क** रेघेचे **ड** स्थळीं **ब ड** आणि **क ड** असे दोनभाग झालेआहेत, ह्या कारितां (२ बु०

७ व्या सि॰ प्र॰) बक आणि बड ह्यांचे वर्ग बक आणि बड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट आणि कड चा वर्ग ह्यांबरोबर आहेत. ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेक्ष्यांत अड मिळीव, तेव्हां बक, बड, आणि अड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज बक व बड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट व कड आणि अड ह्यांचे वर्ग ह्यांबरोबर आहे. अड, बक वर लंब आहे, ह्याकरितां (१ बू॰ ४७ व्या सि॰ प्र॰) बड आणि अड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज अब च्या वर्गा बरोबर आहे, व अड आणि कड ह्यांच्या वर्गांची बेरीज अक च्या वर्गाबरोबर आहे, त्यास बक-चा वर्ग आणि अब-चा वर्ग मिळून, अक चा वर्ग व बक आणि बड ह्यांच्या काटकोनचौकना-ची दुप्पट ह्यांबरोबर आहेत, म्हणजे अक-चा वर्ग अब आणि बक ह्यांच्या वर्गांपेक्षां बक आणि बड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुप्पटी-नें कमी आहे.

आतां अड लंब अबक त्रिकोणाच्या बाहेर पडतो असें मानू. ड कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू॰ १६ व्या सि॰ प्र॰) अकब कोन विशाळ

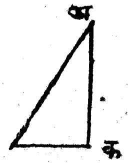
आहे, आणि ह्यास्तव (२ बु० १२ व्या सि० प्र०) अब-
चा वर्ग अक आणि कब ह्यांच्या वर्गांची बेरीज, व
बक आणि कड ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्प-
ट ह्यां बरोबर आहे. ह्या
समीकरणाच्या दोन्ही पे-
ह्यांत बक चा वर्ग मि-
ळीव, तेव्हां अबे आणि



बके हे अके, बक आणि कड ह्यांच्या काटकोन
चौकोनाची दुप्पट, आणि बक वर्गाची दुप्पट ह्यां-
बरोबर आहेत. बड रेषेचे क स्थळीं दोन भाग
झाले आहेत, त्यास कड आणि बक ह्यांचा काट-
कोनचौकोन, व बकचा वर्ग (२ बु० ३ ऱ्या सि०
प्र०) बक आणि बड ह्यांच्या काटकोनचौकोना
बरोबर आहेत, म्हणून बड आणि बक ह्यांच्या
काटकोनचौकोनाची दुप्पट, बक आणि कड
ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप्पट, व बकच्या व-
र्गाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहे, ह्यास्तव अब आ-
णि बक ह्यांचे वर्गांची बेरीज अकचा वर्ग, व
बड आणि बक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाची दुप-
ट ह्यां बरोबर आहेत, ह्यास्तव अक चा वर्ग अब

आणि बक ह्यांच्या वर्गापेक्षां बड आणि बक ह्यांच्या काटकोनचौकोनाच्या दुपटीनें कमी आहे, हें सिद्ध.

आतां असें मानूं, कीं अक, बक वर लंब आहे. ह्यापक्षीं बक च ब कोन आणि लंब ह्यांचे मधील अंतर पडेल, ह्यास्तव अब आणि बक ह्यांचे वर्ग (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अक चा वर्ग आणि बकच्या वर्गाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहेत, हें स्पष्ट आहे.

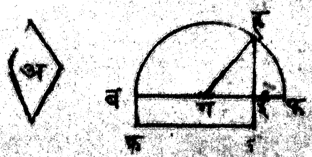


१४ सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित सरलरेषाकृती बरोबर चौरस करावयाचें.

अ एक आकृति आहे, त्यास ती बरोबर एक चौरस करावयाचें.

(१ बू० ४५ व्या सि० प्र०) अ आकृती बरोबर बकडई काटकोनचौकोन कर. बई बाजू फ पर्यंत वाढीव.



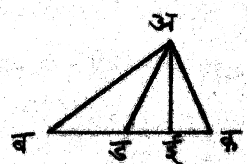
अशी कीं ईफ, ईड बरोबर होईल. बफ चे ग स्थळीं दोन समान भाग कर. ग मध्य कल्पून गफ त्रिज्येनें बहफ अर्धवर्तुळ कर. डई वाजू ह पर्यंत वाढीव, आणि ग,ह सांध. बफ रघेचे बग आणि गफ हे दोन समान भाग आहेत, व बई आणि ईफ हे दोन असमान भाग आहेत, त्यास (२ बु॰ ५ व्या सि॰ प्र॰) बई॰ईफ काटकोन चौकोन व गई चा वर्ग फग वर्गाबरोबर आहेत. परंतु फग, गह बरोबर आहे; कारण त्या दोन्ही रेघा त्रिज्या आहेत, ह्यास्तव बई॰ईफ काटकोन-चौकोन व गईचा वर्ग हे गहे बरोबर आहेत.ग-ईह कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बु॰ ४७ व्या सि॰ प्र॰) ईगे आणि ईहे हे गहे बरोबर आहेत, ह्यास्तव बई॰ईफ काटकोनचौकोन व ग-ई हे ईगे आणि ईहे ह्यां बरोबर आहेत. त्या दोन्ही-पैक्यांतून गई काढला असतां बई॰ईफ काटकोनचौकोन ईहे वर्गाबरोबर राहील, परंतु बई॰ईफ काटकोनचौकोन बड काटकोन-चौकोनाबरोबर आहे, कारण ईफ, ईड बरोबर आहे, आणि बड काटकोनचौकोन अआकृती-

बरोबर आहे, ह्याकरितां अ आकृति ईह रेषेचे वर्गाबरोबर आहे. ईह रेषेवर चौरस काढलें म्हणजे तें अ आकृतीबरोबर होईल.

अ सिद्धांत. प्रमेय.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूचे दोन समान भाग केले असतां त्या बाजूच्या अर्धाच्या वर्गाची दुप्पट व त्या बाजूचा मध्य व ती समोरील कोन ह्यांस सांधणाऱ्या रेषेच्या वर्गाची दुप्पट ह्यांची बेरीज इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर असते.

अबक त्रिकोणाच्या बक बाजूचे ड स्थळीं दोन समान भाग केले आहेत, त्यास बड च्या वर्गाची दुप्पट व ड बिंदु व अ कोन ह्यांस सांधणारी जी अड रेघ तिच्या वर्गाची दुप्पट हीं अब आणि अक यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहेत.



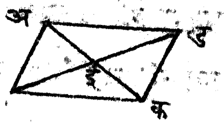
अ बिंदूतून अई रेघ बक-वर लंब कर. (१ बु॰ ४७ व्या सि॰ प्र॰) अबे, अई

आणि ब ई ह्यांच्या वर्गाबरोबर आहे, तसाच अक, अई आणि कई ह्यांच्या वर्गाबरोबर आहे. दोन्ही समीकरणांची बेरीज घेतली असतां अब आणि अक ह्यांच्या वर्गाची बेरीज बई, कई आणि अई च्या वर्गाची दुप्पट ह्यांबरोबर होते. बक रेषेचे ड स्थळीं दोन समान भाग झाले आहेत, व ई स्थळीं दोन असमान भाग झाले आहेत, ह्याकरितां (२ वू० ९ व्या सि० प्र०) बई व कई ह्यांची बेरीज बड वर्गाची दुप्पट व डई वर्गाची दुप्पट ह्यांबरोबर आहे, ह्याकरितां अब आणि अक ह्यांच्या वर्गाची बेरीज बड, डई आणि अई ह्यांच्या दुपटीबरोबर आहे, परंतु डई वर्गाची दुप्पट आणि अई वर्गाची दुप्पट मिळून (१ वू० ४७ व्या सि० प्र०) अड वर्गाच्या दुपटीबरोबर आहे, ह्याकरितां अब आणि अक ह्यांच्या वर्गाची बेरीज बड आणि अड ह्यांच्या वर्गाच्या दुपटीबरोबर आहे, हें सिद्ध.

ब सिद्धांत प्रमेय.

समांतरभुज चौकोनांत कर्णांच्या वर्गांची बेरीज समांतरभुज चौकोनाच्या चार बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर असते.

अबकड एक समांतरभुज चौकोन आहे, त्यास त्याच्या अक आणि बड कर्णांच्या वर्गांची बेरीज अड, कड, बक आणि अब ह्या चार



बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

अक आणि बड कर्णरेषा ई स्थळीं परस्परांस छेदितात, असें मानूं. (१ बू० १५ व्या सि० प्र०) अईड कोन बईक कोना बरोबर आहे, अडई आणि डबक हे व्युत्क्रम कोन (१ बू० २९ व्या सि० प्र०) बरोबर आहेत, व (१ बू० ३४ व्या सि० प्र०) अड बाजू, बक बाजू बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बू० २६ व्या सि० प्र०) अईड आणि बईक हे दोन त्रिकोण परस्पर

बरोबर आहेत, म्हणून अई बाजू, ईक बाजू बरोबर आहे, व बई बाजू, ईड बाजू बरोबर आहे.

अक बाजूचे ई स्थळीं समान दोन भाग झाले आहेत, ह्याकरितां (२ बु० अ सि० प्र०) अब चा वर्ग आणि बक चा वर्ग ह्यांची बेरीज, बई वर्गाची दुप्पट, व अई वर्गाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहे. तसेंच अड आणि कड ह्यांची बेरीज अई वर्गाची दुप्पट, व बई वर्गाची दुप्पट ह्यां बरोबर आहे, कारण बई, ईड बरोबर आहे. ह्या दोन्ही समीकरणांची बेरीज घेतली असतां अबे, बके कडे, आणि अडे ह्या सर्वांची बेरीज अई वर्गाची चौपट, व बई वर्गाची चौपट ह्यां बरोबर होते, परंतु अई, अक चें अर्ध आहे, व बई, बड चें अर्ध आहे, ह्याकरितां (२ बु० ८ व्या सि० २ कु० प्र०) बई वर्गाची चौपट, अई वर्गाची चौपट अनुक्रमें बडे आणि अके ह्यां बरोबर आहे, ह्यास्तव अब, बक, कड आणि अड ह्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज अक आणि बड कर्ण रेषांच्या वर्गांच्या बेरजे

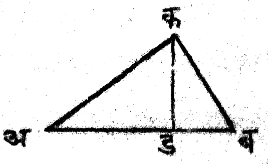
बरोबर आहे हें सिद्ध.

१ कु. समांतर भुज चौकोनांत कर्ण रेषा परस्परांचे समान दोन दोन भाग करतात.

क सिद्धांत. प्रमेय.

त्रिकोणांत शिरकोनापासून पायावर लंब केला असतां त्याचे जे दोन भाग होतात, त्यांच्या वर्गांची वजाबाकी दुसऱ्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या वजाबाकी बरोबर असते.

अ ब क एक त्रिकोण आहे, त्याच्या क शिरकोनापासून अ ब पायावर क ड लंब केला आहे, त्यास अ ड आणि ब ड ह्या दोन भागांच्या वर्गांची वजाबाकी अ क आणि ब क ह्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या वजाबाकी बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

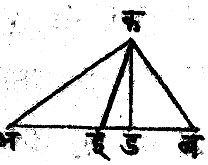


(१ यू० ४७ व्या सि० प्र०) अक॑ = अड॑ + डक॑ आणि बक॑ = बड॑ + डक॑ ह्या दोन समीकरणांची वजाबाकी कर, म्हणजे अक॑ - ब-

क^{२} = अड^{२} − बड^{२} हें सिद्ध.

११ कु॰ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज व त्यांची वजाबाकी ह्यांचा काटकोनचौकोन शिरःकोनापासून पायावर लंब केला असतां तो ज्या ठिकाणीं पायास छेदितो, तें स्थान व पायाचा मध्य, ह्यांच्या मधील अंतर आणि पाया ह्यांच्या काटकोनचौकनाच्या दुपटी बरोबर असतो.

अब पायाचे ई स्थळीं दोन समान भाग केले आहेत, त्यास (अक + बक) × (अक − बक) = २ अब • ईड, हें सिद्ध करावयाचें.



अक^{२} − बक^{२} = अड^{२} − बड^{२}. (२ कु॰ ५ व्या सि॰ कु॰ म॰) (अक + बक)(अक − बक) = (अड + बड)(अड − बड), परंतु (अड + बड) = अब आणि (अड − बड) = २ ईड, ह्याकरितां (अड + बड)(अड − बड) = २ अब • ईड, म्हणून (अक + बक) × (अ

क - बक) = २ अब • ईड.

२ कु• विवक्षित रेषेमध्यें एक बिंदु घेऊन त्यांतून तीवर लंब काढून त्यामध्यें जितके पाहिजे इतके बिंदु घेऊन त्यांपासून विवक्षित रेषेच्या टोंकांपर्यंत रेषा काढल्या असतां त्या रेषांच्या (म्हणजे लंबांतील बिंदूंतून विवक्षित रेषेच्या टोंकांपर्यंत काढलेल्याज्या दोन दोन रेषा त्यांच्या) वर्गांचीं अंतरें सारखीं भरतात.

कारण, हीं सर्व अंतरें विवक्षित रेषेच्या खंडांच्या वर्गांच्या अंतराबरोबर आहेत.

२ कु• विवक्षित रेषेचे अंगास एक बिंदु घेऊन त्यापासून तिचे टोंकांपर्यंत रेषा काढल्या असतां त्या दोन रेषांच्या वर्गांचें अंतर जर ह्या प्रमाणेंच दुसरा एक बिंदु घेऊन त्यापासून विवक्षितरेषेच्या टोंकांपर्यंत दोन काढलेल्या रेषांच्या वर्गांच्या अंतराबरोबर होईल, तर त्या दोन बिंदूंस सांधणारी रेघ हे बिंदु विवक्षित रेषेचे दोन समान भाग करणाऱ्या लंबाच्या एके अंगास असल्यास तीवर लंब होते.

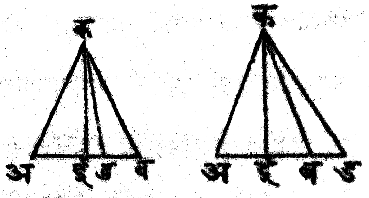
कारण ह्या दोन बिंदूंपासून विवक्षित रेषेवर लंब काढले असतां तिचे जे खंड पडतील ते

बरोबरच होतील, म्हणजे ते दोन लंब परस्परांशी मिळतील.

ड सिद्धांत प्रमेय.

समद्विभुज त्रिकोणांत शिरकोनापासून पायावर रेघ काढली असतां (ती रेघ पायाचे खंड आंतल्या अंगानें करो किंवा बाहेरल्या अंगानें करो) पायाचे जे दोन खंड होतात त्यांचा काटकोन चौकोन ती रेघ व त्या त्रिकोणाची कोणतीही एक बाजू त्यांच्या वर्गांच्या वजाबाकीबरोबर होतो.

अबक एक समद्विभुज त्रिकोण आहे. त्याच्या शिरापासून पायास छेदणारी अशी कड रेघ काढली आहे, त्यास अड आणि बड ह्या खंडांचा काटकोन चौकोन अक आणि कड ह्यांच्या वर्गांच्या वजाबाकीबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



क बिंदूपासून कई रेघ अब वर लंब कर. (पहिले आकृतीविषयीं विचार) (२ चू० क

सि॰ प्र॰) अके - कडे = अई - ईडे = (२ बू॰ ५ व्या सि॰ कु॰ प्र॰) (अई + ईड) (अई - ईड) = अड॰डब कारण अई - ईड = बई - ईड = डब.

(दुसरे आकृतीविषयीं विचार करूं.) (२ बू॰ क सि॰ प्र॰) कडे - अके = ईडे - अई (२ बू॰ ५ व्या सि॰ कु॰ प्र॰) (ईड + अई) (ईड - अई) = अड॰डब कारण ईड - अई = ईड - ईब = डब.

१ कु॰ धनचिन्ह पहिल्या आकृतीविषयीं व ऋणचिन्ह दुसरे आकृतीविषयीं समजलें असतां अके = कडे ± अब॰डब असें लिहिलें असतां चालेल.

कारण पहिल्या आकृतीमध्यें अके - कडे = अड॰डब, ह्याकरितां दोन्ही पेक्ष्यांत कडे मिळविला असतां अके = कडे + अड॰डब असें होतें. दुसरे आकृतींत कडे - अके = अड॰डब, ह्याकरितां दोन्ही पेक्ष्यांत अडे मिळविला, आणि अड॰डब काटकोनचौकोन वजा केला, तर अके = कडे - अड॰डब

असें येतें.

२ कु॰ दोन विषम रेषांच्या अंतराचे अर्ध त्यांच्या बेरजेच्या अर्धांत मिळविलें असतां मोठी रेघ येते, आणि तें वजा केलें असतां लहान रेघ येते.

कारण, अड आणि डब (पहिल्या आकृतीकडे पहा.) ह्या विषम रेषा आहेत, अई त्यांच्या बेरजेचें अर्ध आहे, आणि ईड त्यांच्या वजाबाकीचें अर्ध आहे. आतां अई + ईड = अड आणि अई - ईड = डब हें उघड आहे.

दुसऱ्याबुकांतीलप्रश्न.

१ चतुष्कोणाकृतीचे सर्वकोनांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर असतें.

२ कोणत्याही चौकानाच्या समोरासमोरच्या बाजू किंवा समोरासमोरचे कोन बरोबर असल्यास तो चौकोन समांतरभुजचौकोन असतो.

३ विवक्षित दोन चौरसांचे वजाबाकीबरोबर जिचा वर्ग होईल अशी रेघ काढावयाची.

४ कितीही रेघा असल्या तरी त्यांच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर जिचा वर्ग होईल अशी रेघ काढावयाची.

५ समांतरभुज चौकोनाच्या कोणत्याही बाजूंत एक बिंदु घेऊन त्यांतून अशी एक रेघ काढावयाची आहे, कीं तिच्या योगानें त्या समांतरभुजचौकोनाचे दोन समानभाग पडतील.

६ काटकोनचौकोनांत एक बिंदु घेऊन त्यापासून सर्वकाटकोनांपर्यंत रेघा काढल्या असतां समोरासमोरच्या काटकोनांपर्यंत ज्या रेघा काढल्या आहेत त्यांच्या वर्गांच्या बेरजा परस्पर

बरोबर होतील.

७ विवक्षित त्रिकोणाच्या कोणत्याही एका बाजूंत एक बिंदु घेऊन त्यापासून एक रेघ काढून तिनें त्या त्रिकोणाचे दोन समान भाग करावयाचे.

८ काटकोन त्रिकोनांत काटकोन ज्या बाजूंच्या मध्यें असतो त्यांपैकीं कोणतेही एके बाजूचा वर्ग, कर्ण आणि दुसरी बाजू ह्यांची बेरीज व वजाबाकी ह्यांच्या काटकोन चौकोना बरोबर असतो.

९ एक बिंदूंत तीन रेघांनीं परस्परांस छेदलें असतां जे साहा कोन पडतात ते जर बरोबर असले तर कोणत्याही एका बिंदूपासून त्या तिन्ही रेघांवर लंब केले असतां त्यांतील मोठा लंब दुसऱ्या दोन लंबांच्या बेरजे बरोबर असतो.

१० काटकोन त्रिकोनांत काटकोनापासून कर्णावर लंब केला असतां जे दोन खंड होतात त्यांचा काटकोन चौकोन त्या लंबाच्या वर्गा बरोबर असतो.

११ एक विवक्षित बिंदु व तीन विवक्षित रेघा आहेत, आणि त्या तीन रेघांपैकीं दोन परस्परांशीं समांतर

आहेत, त्यास त्या दोन समांतर रेषांमध्यें एक एक असा बिंदु काढावयाचा आहे, कीं ते दोन बिंदु विवक्षित बिंदूपासून समान अंतरावर होतील, व त्यांस सांधणारी रेघ तिसऱ्या विवक्षित रेघेशीं समांतर होईल.

१२ त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंच्या मध्यांस सांधणारी रेघ तिसऱ्या बाजूशीं समांतर असते, व तिच्या अर्धाबरोबर असते.

१३ चतुष्कोनाच्या बाजूंचे मध्यबिंदु अनुक्रमानें सांधलें असतां जो चतुष्कोन होतो त्याच्या समोरासमोरच्या बाजू समांतर होतात.

१४ दोन विवक्षित रेघा आहेत, त्यांपैकी एकीचे असे दोन भाग करावयाचे, कीं त्या भागांपैकीं एक भाग व दुसरी रेघ ह्यांचा काटकोनचौकोन दुसऱ्या भागाच्या वर्गाबरोबर होईल.

१५ दोन विवक्षित रेघांपैकीं एक रेघ इतकी वाढवावयाची आहे, कीं वाढविलेल्या भागाचा वर्ग ती रेघ व दुसरी रेघ ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर होईल.

१६ त्रिकोणाच्या पायावर समांतरभुज चौकोन काढला, आणि त्याच्या दुसऱ्या दोन बाजूंवर त्यां

समोरच्या ज्यांच्या बाजू पायावरील समांतरभुज चौकोनाच्या टोकांतून जातील असे दोन समांतर भुजचौकोन काढिले, आणि जर बाजूंवरील समांतर भुज चौकोन त्रिकोणाच्या बाहेर असले तर त्यांची बेरीज पायावरील समांतर भुज चौकोनाबरोबर होईल, आणि बाजूंवरील समांतर भुज चौकोनांपैकीं एक समांतरभुज चौकोन त्रिकोणावर पडला तर त्यांची वजाबाकी पायावरील समांतरभुज चौकोनाबरोबर होईल.

१७ चतुष्कोणाकृतीच्या चार बाजूंच्या वर्गांची बेरीज त्या आकृतीच्या कर्णांचे वर्ग व त्या कर्णांच्या मध्यांस सांधणाऱ्या रेषेच्या वर्गाची चौपट ह्यांचे बेरजेबरोबर असते.

१८ चतुष्कोणाकृतीच्या कोणत्याही समोरासमोरच्या दोन बाजूंचे वर्ग आणि त्यांचे मध्य सांधणाऱ्या रेषेच्या वर्गाची चौपट ह्यांची बेरीज दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्ग आणि कर्णांचे वर्ग ह्यांच्या बेरजे बरोबर असते.

१९ दोन रेषांची बेरीज व वजाबाकी ह्यांचे वर्गांची बेरीज त्या दोन रेषांच्या वर्गांच्या दुपटीबरोबर

असते.

२० कोणती ही रेघ मध्यप्रमाणानें छेदली असतां जें तिचे दोन खंड पडतात त्यांपैकीं मोठा खंड व ती सर्व रेघ हीं सांधलीं असतां जी रेघ होईल ती सांध्याच्या जागीं मध्यप्रमाणानें छेदली जाईल.

२१ चतुष्कोणाकृतीच्या कर्णरेघांच्या वर्गांची बेरीज त्या आकृतीच्या समोरा समोरच्या बाजूंच्या मध्यांस सांधणाऱ्या रेघांच्या वर्गांच्या दुपटी बरोबर असते.

२२ त्रिकोणाच्या तिर्यक् कोनाचे कितीही समान भाग केले असतां त्या समान भाग करणाऱ्या रेघांनीं त्या कोना समोरील बाजूचे जे भाग होतात ते असमान होतात, आणि त्या कोनापासून लंब केला असतां लंबाच्या समीपतर जो भाग असतो तो दूरतर भागापेक्षां लहान होतो.

तिसरें बूक.

व्याख्या.

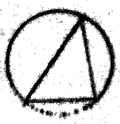
१ वर्तुळाचे परिघाचे भागास वर्तुळाचा कौंस असें म्हणतात.

२ कौंसाचे टोंकांस सांधणाऱ्या रेषेस ज्या असें म्हणतात.

३ अर्धवर्तुळाच्या कौंसास परिध्यर्ध म्हणतात.

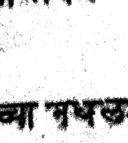
४ कौंस आणि त्याचीं टोंकें सांधणारी रेष ह्यांच्या मध्यें जो वर्तुळाचा भाग सांपडतो त्यास वर्तुळखंड म्हणतात.

५ कौंसामध्यें एक बिंदु घेऊन त्यापासून कौंसाच्या टोंकास सांधणाऱ्या रेषेच्या टोंकांपर्यंत दोन रेषा केल्या असतां जो कोन होतो त्यास वर्तुळखंडांतील कोन असें म्हणतात.



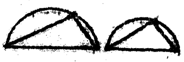
६ कौंसासमोर जो कोन असतो तो कौंसावर आहे असें म्हणतात.

७ दोन त्रिज्या आणि त्यांच्या टोंकांच्या मधला कौंस ह्यांच्यामध्यें जो वर्तुळाचा भाग सांपडतो त्यास वर्तुळाचा सेकतोर



असें म्हणतात.

८ वर्तुळाच्या ज्या खंडांत समान कोन असतात त्यांस सजातीय वर्तुळखंड असें म्हणतात.



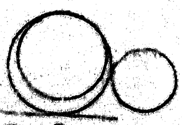
९ ज्या कौंसां समोर समानमध्यकोण असतात त्यांस सजातीय कौंस असें म्हणतात.

१० ज्या सेकतोरांतील कौंस सजातीय असतात त्यांस सजातीय सेकतोर असें म्हणतात.

११ ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात त्यांस समानवर्तुळें असें म्हणतात.

१२ जी रेषा वर्तुळास मिळते आणि वाढविली असतां त्यास छेदित नाहीं, त्या रेषेस वर्तुळस्पर्शरेषा असें म्हणतात.

१३ जीं वर्तुळें परस्परांस मिळतात, पण छेदित नाहींत, तीं वर्तुळें परस्परांस स्पर्श करितात असें म्हणतात, आणि अशा प्रकारच्या वर्तुळांस स्पर्शवर्तुळें असें म्हटलें तरी चालेल



१४ स्पर्शरेषा ज्या बिंदूंत वर्तुळास मिळते किंवा स्पर्शवर्तुळें ज्या बिंदूंत परस्परांस मिळतात त्या बिंदूंस स्पर्शबिंदु असें म्हणतात.

१५ वर्तुळमध्यापासून ज्यांवर लंब केले आणि

ते समान असले तर त्या ज्या मध्यापासून सारखे अंतरावर आहेत असें म्हणतात, आणि ज्याजवर मह-त्तर लंब असतो, ती ज्या मध्यापासून दूरतर आहे असें म्हणतात.

१६ जी रेषा वर्तुळाबाहेर एक बिंदु घेऊन काढली असते व जी वर्तुळास दोन बिंदूंत मिळते, त्या रेषेस छेदनरेषा असें म्हणतात. छेदनरेषाही एक वाढविलेली ज्याच होय, असें म्हटलें असतां चालेल, आणि वर्तुळाचे बाहेरील ज्या बिंदूपासून छेदनरेषा काढली असते त्या बिंदूस बाह्य छेदनबिंदु असें म्हटलें असतां चालेल.

---

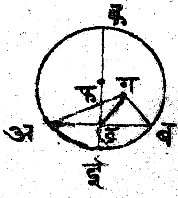
३ बूक

१ सिद्धांत कृत्य.

कोणते ही वर्तुळाचा मध्य काढावयाचा.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्याचा मध्य काढावयाचा.

अबक वर्तुळांत अब ज्या काढ, आणि (१ बू० १० व्या सि० प्र०) तिचे ड स्थळीं दोन समान भाग कर. (१ बू० ११ व्या सि० प्र०) अब रेघेवर ड बिंदूतून कड लंब कर, तो ई पर्यंत वाढीव, आणि कई रेघेचे फ स्थानीं दोन समान भाग कर.



फ हा अबक वर्तुलाचा मध्यबिंदु आहे.

फ मध्यबिंदु नसल्यास ग मध्यबिंदु आहे, असें मानूं. ग,अ ग,ब आणि ग,ड बिंदु सांध. अडग आणि गडब ह्या दोन त्रिकोणांत अड बाजू बड बाजू बरोबर आहे, डग दोन त्रिकोणांस साधारण आहे, आणि अग, बग बरोबर आहे, कारण अग आणि गब ह्या

दोन्ही रेघा त्रिज्या आहेत, म्हणून (१ बू० ८ व्या सि० प्र०) अडग कोन गडब कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बू० ११ व्या सि० प्र०) गडब कोन काटकोन आहे. पण फडब हा कोनही काटकोन आहे, ह्याकरितां फडब कोन गडब कोनाबरोबर आहे. मोठा कोन लहान कोनाबरोबर होणें ही गोष्ट अशक्य आहे, ह्याकरितां ग हा अबक वर्तुळाचा मध्यबिंदु नव्हे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करून दाखवितां येईल, कीं फ शिवाय दुसरा बिंदु अबक वर्तुळाचा मध्य असावयाचा नाहीं, म्हणजे अबक वर्तुळाचा मध्यबिंदु फ च आहे.

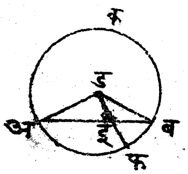
१ कु० वर्तुळांत जी रेघ दुसऱ्या रेघेचे समान दोन भाग करून तीवर लंब होते, त्या रेघेंत वर्तुळाचा मध्य असतो.

२ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाच्या परिघांत कोणतेही दोन बिंदु घेतले तरी त्यांस सांधणारी रेघ वर्तुळांतच पडते.

अबक एक वर्तुळ आहे. त्याच्या परिघांत अ आणि ब असे दोन बिंदु घेतले आहेत, तर त्यांस

सांधणारी अब रेघ वर्तु-
ळांतच पडेल.



अब रेघेंत ई बिंदु घे, अबक वर्तुळाचा (३ बु० १ ल्या सि० प्र०) ड मध्य बिंदु काढ, अड, डब आणि ड, ई बिंदु सांध, आणि डई बाजू परिघास मिळे तों पर्यंत वाढीव. ती रेघ परिघास ज्या स्थळीं मिळते त्यास फ अशी संज्ञा दे. अबड त्रिकोणांत अड बाजू बड बाजूबरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बु० ५ व्या सि० प्र०) डअब कोन डबअ कोनाबरोबर आहे; आणि अईड त्रिकोणाची अई बाजू ब पर्यंत वाढविली आहे, ह्या करितां (१ बु० १६ व्या सि० प्र०) डईब कोन डअई कोनापेक्षां मोठा आहे, पण डअब कोन डबअ कोनाबरोबर आहे, म्हणून डईब कोन डबई कोनापेक्षां मोठा आहे, म्हणून (१ बु० १९ व्या सि० प्र०) डब बाजू डई बाजूपेक्षां मोठी आहे. पण डब आणि डफ बरोबर आहेत, कारण त्या दोन्ही रेघा त्रिज्या आहेत, ह्यास्तव डफ डई पेक्षां मोठी आहे, ह्यावरून स्पष्ट होतें, कीं ई बिंदु वर्तुळांत

आहे. अ ब रेषेंत अ आणि ब ह्यांच्या मधले जितके बिंदु आहेत तितके वर्तुळांत आहेत, असें ह्याच रीतीनें सिद्ध करतां येईल, ह्याकरितां अ ब रेघ वर्तुळांत आहे, हें सिद्ध.

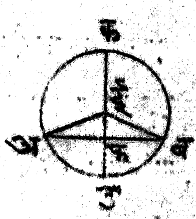
टीप. ज्या स्थलीं दोन बिंदु व्यासाची टोंकेंच आहेत, त्या स्थलीं ह्या सिद्धांताची सत्यता उघडच आहे, व ज्या स्थलीं व्यासापेक्षां कमी अंतरावर दोन बिंदु आहेत, त्या स्थलीं सुद्धां ह्या सिद्धांताची सत्यता वर्तुळाच्या गुणावरून स्पष्टच दिसून येते; परंतु ज्या स्थलीं दोन बिंदु अत्यंत जवळ आहेत, त्या स्थलीं मात्र त्या दोन बिंदूंस सांधणारी रेघ सर्वथैव वर्तुळाचे आंतच पडेल, तिचा किंचित् सुद्धां भाग कोंसावर पडणार नाहीं, ही गोष्ट उघड दिसत नाहीं; किंचित् संशयास जागा राहते. तर त्या स्थलचा संशय दूर करण्याकरितां ह्या सिद्धांताची सिद्धता करणें आवश्यक होय. ज्या स्थलीं बिंदु अत्यंत जवळ आहेत, तें स्थल सिद्धता करण्या करितां घेतलें असतां, आकृति गिचमीड होईल, ह्याकरितां ज्या स्थलीं बिंदु पुरेतपणीं दूर अंतरावर आहेत, तेंच स्थल सिद्धते करितां घेतलें पाहिजे. आतां त्या स्थलीं सिद्धांताची सिद्धता झाली असतां, ती सिद्धता परमावधीच्या

स्थलालाही लागू पडेल. ह्या सिद्धांताप्रमाणें दुसरे पुष्कळ सिद्धांत आहेत, कीं ज्यांची सत्यता परमावधीच्या स्थलाखेरीज करून सर्वस्थलीं उघड दिसते; परंतु परमावधीच्या स्थलची शंका दूर करण्याकरितां असल्या सर्व सिद्धांतांची सिद्धता केली आहे.

३ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुलमध्यांतून जाणारी जी रेघ वर्तुलमध्यांतून न जाणाऱ्या ज्येचे दोन समान भाग करिते ती रेघ त्या ज्येवर लंब होते; व वर्तुलमध्यांतून जाणारी जी रेघ ज्येवर लंब होते ती तिचे दोन समान भाग करिते.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्यामध्यें कड रेघ मध्यांतून काढली आहे, ती मध्यांतून नजाणाऱ्या अब ज्येचे दोन समान भाग करिते, त्यास ती अब वर लंब आहे, हें सिद्ध करावयाचें. (३वू० १ल्या सि० प्र०) अबक वर्तुळाचा ई मध्य काढ, आणि अ,ई आणि ब,ई बिंदु सांध.



अफई आणि बफई ह्या दोन त्रिकोणांत

अई बाजू बई बाजूबरोबर आहे, कारण त्या दोन्ही त्रिज्या आहेत, अफ बाजू बफ बाजूबरोबर आहे, आणि फई दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्याकरितां (१ बू॰ ८ व्या सि॰ प्र॰) अफई आणि बफई हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत, म्हणून अफई कोन बफई कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बू॰ ११ व्या व्या॰ प्र॰) अफई आणि बफई हे दोन्ही कोन काटकोन आहेत, ह्याकरितां कड रेघ अब रेघेवर लंब आहे, हें सिद्ध.

कड रेघ मध्यांतून जाऊन अब रेघेवर लंब पडते, त्यास कड रेघ तिचे दोन समान भाग करिते, म्हणजे अफ रेघ फब रेघेबरोबर होते, तें सिद्ध करावयाचें.

पूर्वीप्रमाणेंच आकृति कर. ईअफ आणि ईबफ ह्या दोन त्रिकोणांत ईअ रेघ ईब बरोबर आहे, कारण त्या दोन्ही रेघा त्रिज्या आहेत, (१ बू॰ ५ व्या सि॰ प्र॰) ईअफ कोन ईबफ कोनाबरोबर आहे, आणि अफई काटकोन बफई काटकोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बू॰ २६ व्या सि॰ प्र॰) ईअफ आणि ईबफ हे दोन त्रिकोण एकरूप

आहेत, म्हणून अफ बाजू बफ बरोबर आहे हें सिद्ध.

कु० जी रेघ ज्येचे दोन समानभाग करिते, आणि तीवर लंब होते, ती रेघ वर्तुलमध्यांतून जाते.

कारण, जी रेघ वर्तुलमध्यांतून जाऊन ज्येचे दोन समानभाग करिते ती रेघ ज्येवर लंब असते, ह्या करितां ती रेघ आणि ज्येचे दोन समान भाग करून तीवर लंब होणारी रेघ ह्या जमून जातील, म्हणून ज्येचे दोन समानभाग करून तीवर लंब होणारी रेघ वर्तुलमध्यांतून जाते, हें उघड आहे.

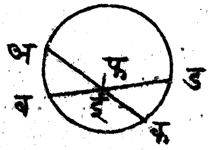
टीप. वर्तुलमध्यांतून जाणें, वर्तुलमध्यांतून न-जाणाऱ्या ज्येवर लंब होणें आणि तिचे दोन समान भाग करणें, ह्या तीन गुणांपैकीं ज्या रेघेच्या अंगीं दोन गुण असतील तिचे अंगीं तिसरा गुण असेलच.

४ सिद्धांत. प्रमेय.

मध्यांतून उभयतां नजाणाऱ्या अशा दोन ज्यांनीं परस्परांस छेदिलें असतां जे त्यांचे खंड होतात ते समान नसतात.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्यांत अक आ-

णि बड ह्या दोन ज्या परस्परांस ई स्थळीं छेदितात, आणि ह्यामुळें जे त्यांचे अई आणि ईक आणि बई आणि ईड खंड पडले आहेत हे समान नाहींत, म्हणजे



अई, ईक बरोबर नाहीं, व बई ईड बरोबर नाहीं, हें सिद्ध करावयाचें

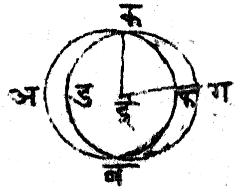
अई, ईक बरोबर आहे, आणि बई, ईड बरोबर आहे असें म्हटल्यास, (३ बू० १ल्या सि० प्र०) अबकड वर्तुळाचा फ मध्य काढ, आणि फ, ई बिंदु सांध. फई रेघ मध्यांतून येऊन अक रेघेचे ई स्थळीं दोन समान भाग करिते, ह्याकरितां (३ बू० २ऱ्या सि० प्र०) फईअ हा कोन काटकोन आहे तसेंच फई रेघ बड रेघेचे ई स्थळीं दोन समान भाग करिते, ह्याकरितां फईब कोन काटकोन आहे. फईअ कोन काटकोन आहे, असें पूर्वी दाखविलें आहे, ह्याकरितां फईब कोन फईअ कोनाबरोबर आहे, पण लहान कोन मोठ्या कोनाबरोबर होणें हें अशक्य आहे, ह्या

स्तव अई आणि ईक हे खंड समान नाहींत, तसेंच बई आणि ईड हे खंड समान नाहींत.

५ सिद्धांत प्रमेय.

जीं दोन वर्तुळें परस्परांस छेदितात, त्यांचा मध्यबिंदु एक नसतो.

अबक आणि कडग हीं दोन वर्तुळें परस्परांस ब आणि क ह्या दोन बिंदूंत छेदतात, त्यास ह्यांचा मध्य एक नाहीं, हें सिद्ध करावयाचें.



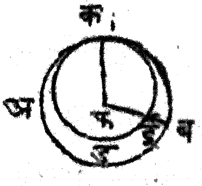
ह्या दोन्ही वर्तुळांचा मध्य एक आहे, असें म्हटल्यास त्यांचा मध्य ई आहे असें मानूं. ईक सांध, आणि ईफग एक रेघ काढ, ही रेघ अबक वर्तुळास फ स्थळीं व कबग वर्तुळास ग स्थळीं छेदिते. अबक वर्तुळाचा मध्य ई आहे, ह्याकरितां ईक रेघ ईफ बरोबर आहे, व कबग वर्तुळाचा मध्य ई च आहे, ह्यास्तव कई, ईग बरोबर आहे. कई, ईफ बरोबर आहे, असें पूर्वी दाखविलें आहे, म्हणून ईफ,

ई ग बरोबर आहे. लहान रेघ मोठ्या रेघेबरोबर हो-णें, हें अशक्य आहे, ह्याकरितां अबक आणि क-बग ह्या दोन वर्तुळांचा मध्य ई नाहीं.

६ सिद्धांत-प्रमेय.

एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाचे आंत असून त्यास स्पर्श करीत असल्यास त्या दोन वर्तुळांचा मध्यबिंदु एक नसतो.

कडई वर्तुळ अबक वर्तुळास त्याचे आंत असून क स्थळीं स्पर्श करिते, त्यास त्या दोन व-र्तुळांचा मध्यबिंदु एक नाहीं, हें सिद्ध करावयाचें.



ह्यांचा मध्यबिंदु एक आहे, असें म्हटल्यास फ मध्यबिंदु आहे असें मानूं. फ, क बिंदु सांध, आणि फईब एक रेघ काढ. कडई वर्तुळा-चा मध्य फ आहे, ह्यास्तव फक, फई बरोबर आहे. आणि अबक वर्तुळाचा मध्य फ आहे, ह्या-करितां फक, फब बरोबर आहे, म्हणून फई, फब बरोबर आहे. लहान रेघ मोठ्या रेघेबरोबर होणें

अशक्य, ह्याकरितां **अबक** आणि **कडई** ह्या दोन वर्तुळांचा मध्य एक नाहीं.

७ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाच्या व्यासांत मध्यबिंदु नघेतां दुसरा एक बिंदु घेऊन त्यापासून परिघापर्यंत रेघा काढल्या असतां त्या सर्वांपेक्षां व्यासाच्या ज्या भागांत मध्यबिंदु असतो तो भाग मोठा भरतो, आणि व्यासाचा दुसरा भाग त्या सर्व रेघांपेक्षां लहान भरतो, आणि व्यासाच्या ज्या भागांत मध्यबिंदु असतो, त्याच्या समीपतर जी रेघ असते, ती दूरतर रेघेपेक्षां मोठी भरते. त्या गृहीत बिंदूपासून समान अशा दोनच रेघा काढतां येतील, परंतु त्यांपैकीं एक रेघ व्यासाचे उजवे अंगास पडेल, व एक डावे अंगास पडेल.

अबकड एक वर्तुळ आहे, त्याच्या **अड** व्यासांतील **ई** मध्यबिंदु नघेतां **फ** बिंदु घेऊन त्यापासून **फब**, **फक** आणि **फग** अशा

तीन रेघा केल्या आहेत, तर ह्या सर्व रेघांपेक्षां ज्या

मध्यें मध्यबिंदु आहे, असा जो व्यासाचा भाग अफ हा मोठा आहे आणि दुसरा जो व्यासाचा भाग फ-ड हा सर्व रेषांपेक्षां लहान आहे. फब फक पेक्षां मोठी आहे, आणि फक फग पेक्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

ब,ई क,ई आणि ग,ई बिंदु सांध. (१ बू॰ २० व्या सि॰ प्र॰) फब पेक्षां बई आणि ई-फ यांची बेरीज मोठी आहे, परंतु बई,अई बरोबर आहे, ह्याकरितां अई आणि ईफ ह्यांची बेरीज फब पेक्षां मोठी आहे, ह्मणजे अफ, फब पेक्षां मोठी आहे. बईफ आणि कईफ ह्या दोन त्रिकोणांत बई बाजू कई बाजू बरोबर आहे, बईफ बाजू दोहोंस साधारण आहे, परंतु बई आणि ईफ ह्या दोन बाजूंतील कोन कई आणि ईफ ह्या दोन बाजूंतील कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्याकरितां (१ बू॰ २४ व्या सि॰ प्र॰) बफ बाजू कफ बाजू पेक्षां मोठी आहे, आणि ह्याच कारणास्तव क-फ बाजू गफ बाजू पेक्षां मोठी आहे. गफ आ-णि फई यांची बेरीज गई पेक्षां मोठी आहे, आणि गई, ईड बरोबर आहे, ह्याकरितां गफ

आणि फई ह्यांची बेरीज ईड पेक्षां मोठी आहे, दोन्ही पेक्ष्यांत फई साधारण आहे, ह्याकरितां ती रेघ काढून टाकिली असतां गफ फड पेक्षां मोठी आहे, असें स्पष्ट होतें, ह्याकरितां फ बिंदूपा-सून परिघापर्यंत ज्या रेघा काढल्या आहेत, त्या सर्वां-पेक्षां फअ मोठी आहे, व फड लहान आहे, आ-णि बफ, कफ पेक्षां मोठी आहे, व कफ गफ पेक्षां मोठी आहे.

फ बिंदुपासून परिघापर्यंत दोनच समान रेघा काढतां येतील. त्यांपैकीं एक रेघ फड चे उजवे अंगास पडेल व एक रेघ डाव्या अंगास प-डेल.

ईफ रेघेंत ई बिंदुजवळ गईफ कोना बरोबर (१ बू० २३ व्या सि० प्र०) फईह कोन कर, आणि फ, ह बिंदु सांध. ईफग आणि ईफह ह्या दोन त्रिकोणांत गई बाजू हई बा-जूबरोबर आहे, फई बाजू दोहों त्रिकोणांस सा-धारण आहे, आणि गईफ कोन हईफ कोना-बरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बू० ४ थ्या सि० प्र०) फह बाजू फग बाजूबरोबर आहे. फ बिंदू-

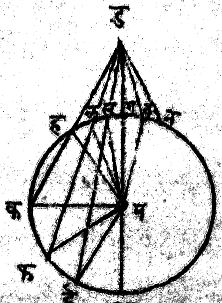
पासून फह रेषेशिवाय दुसरी रेष गफ बरोबर व्हावयाची नाहीं. होईल असें वाटत असल्यास फस गफ बरोबर आहे, असें मानूं. फस, फग बरोबर आहे, आणि फग, फह बरोबर आहे, ह्याकरितां फस फह बरोबर आहे, पण आतांच नुकतें सिद्ध केलें, कीं व्यासाच्या ज्या भागांत मध्यबिंदु असतो, त्या भागाच्या समीपतर जी रेष असते, ती दूरतर रेषेपेक्षां मोठी असते, ह्यास्तव फस फह पेक्षां मोठी आहे, म्हणून मोठ्या रेषेबरोबर लहान रेष होणें ही गोष्ट अशक्य, ह्यास्तव फस फह बरोबर नाहीं, म्हणून तिच्या बरोबरीची जी फग रेष तिशीं ही बरोबर नाहीं.

८ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाचे बाहेरील अंगास एक बिंदु घेऊन त्या पासून वर्तुळाचे परिघापर्यंत रेषा काढल्या असतां त्यां रेषां पैकीं ज्या रेषा अंतर्वक्र परिघावर पडतात त्यांच्यामध्यें जी रेषा मध्यांतून जाते, ती महत्तम असते, व मध्यांतून जाणाऱ्या रेषेच्या समीपतर जी रेषा असते, ती दूरतर रेषेपेक्षां मोठी असते, आणि

ज्या रेषा बहिर्वक्र परिघास लागतात त्यांपैकीं जी बाहेरील बिंदु व व्यास ह्यांच्या मध्यें असते, ती रेषा लघुत्तम असते, व लघुत्तम रेषेच्या समीपतर जी रेषा असते, ती दूरतर रेषेपेक्षां लहान असते. बाहेरील बिंदूपासून परिघावर दोनच समान रेषा होतात, त्यांपैकीं एक लघुत्तम रेषेच्या उजवे अंगास पडते, व एक डावे अंगास पडते.

अ ब क एक वर्तुळ आहे, आणि त्याचे बाहेर **ड** बिंदु आहे. ह्या बिंदूपासून **ड अ, ड ई, ड फ** आणि **ड क** अशा रेषा परिघापर्यंत काढल्या आहेत, आणि ह्या रेषांपैकीं **ड अ** रेष मध्यांतून जाते. परिघाचा अंतर्वक्र जो **अ ई फ क** भाग ह्यावर ज्या रेषा पडतात त्यांमध्यें मध्यांतून जाणारी **अ ड** रेष महत्तम आहे, व तिच्या समीपतर जी रेष आहे ती दूरतर रेषेपेक्षां मोठी आहे, म्हणजे **ड ई, ड फ** पेक्षां मोठी आहे व **ड फ ड क** पेक्षां मोठी आहे,



परंतु परिघाच्या बहिर्वक्र ह ल स ग भागावर ज्या रेषा पडतात त्यांमध्यें ड ग लघुत्तम आहे, जीही रेषा व्यास व बाहेरील बिंदु ह्यांच्या मध्यें आहे. ह्या रेषेच्या समीपतर जी रेषा आहे, ती दूरतर रेषेपेक्षां लहान आहे, म्हणजे ड स ड ल पेक्षां लहान आहे, व ड-ल, ड ह पेक्षां लहान आहे, हें सर्व सिद्ध करावयाचें.

(३ बू० १ ल्या सि० प्र०) अ ब क वर्तु-ळाचा म मध्य काढ, आणि म, ई, म, फ, म, क, म, ह, म, ल, आणि म, स बिंदु सांध. अ म रे-घ म ई रेघेबरोबर आहे. ह्या दोन्ही रेघांत म ड रेघ मिळीव, तेव्हां अ ड रेघ म ई आणि म ड ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. पण म ई आणि म-ड ह्यांची बेरीज (१ बू० २० व्या सि० प्र०) ई ड रेघेपेक्षां मोठी आहे, म्हणून अ ड रेघ ई ड रेघे-पेक्षां मोठी आहे. ई म ड आणि फ म ड ह्या दोन त्रिकोणांत म ई बाजू म फ बाजू बरोबर आहे, आणि म ड बाजू दोहोंस साधारण आहे, परंतु ई-म ड कोन फ म ड कोनापेक्षां मोठा आहे, ह्या कारि-णां (१ बू० २४ व्या सि० प्र०) ई ड बाजू फ ड बाजूपेक्षां मोठी आहे. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें कीं

फड रेघ कड रेघेपेक्षां मोठी आहे. ह्या सर्व वरील कृतीवरून ही गोष्ट सिद्ध झाली, कीं डअ रेघ महत्तम आहे, डई रेघ डफ पेक्षां मोठी आहे, व डफ रेघ डक पेक्षां मोठी आहे.

(१ बू० २० व्या सि० प्र०) मस आणि सड ह्या दोन रेघांची बेरीज मड पेक्षां मोठी आहे, आणि मस मग बरोबर आहे, ह्याकरितां बाकीची सड रेघ बाकीच्या गड रेघेपेक्षां मोठी आहे, म्हणजे गड सड पेक्षां लहान आहे. मलड त्रिकोणांतील स बिंदूपासून मड बाजूच्या म आणि ड ह्या टोंकांपर्यंत सम आणि सड रेघा काढल्या आहेत, त्यास (१ बू० २१ व्या सि० प्र०) मल आणि लड ह्या दोन बाजूंची बेरीज मस आणि सड ह्या दोन बाजूंचे बेरजे पेक्षां मोठी आहे. मस मल बरोबर आहे, तेव्हां लड सड पेक्षां मोठी आहे, हें उघड आहे. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं डह डल पेक्षां मोठी आहे. म्हणून डग ही रेघ लघुत्तम होय, डल, डस पेक्षां मोठी आहे, व डह, डल पेक्षां मोठी आहे.

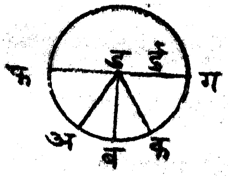
परिघापर्यंत ड बिंदूपासून समान अशा दोन-च रेघा काढतां येतील, आणि त्यांपैकीं एक लघुत्तम रेघेच्या उजव्या अंगास पडेल व एक डावे अंगास पडेल.

म ड रेघेंत म बिंदूजवळ ड म स कोना एवढा ड म ब कोन कर, आणि ड, ब सांध. स म ड आणि ब म ड ह्या दोन त्रिकोणांत म स बाजू म ब बाजूबरोबर आहे, म ड बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे, व स म ड कोन ब म-ड कोनाबरोबर आहे. ह्याकरितां (१ बू० ४ थ्या सि० प्र०) ड स ड ब बरोबर आहे. ड बिंदूपासून परिघापर्यंत ड स शीं समान अशी ड ब शिवाय दुसरी रेघ होणार नाहीं. होईल असें म्हट ल्यास ड स बरोबर ड न रेघ होईल, असें मानूं. ड ब, ड स बरोबर आहे, आणि ड न ड स बरो-बर आहे, ह्याकरितां ड ब ड न बरोबर आहे, म्हणजे लघुत्तम रेघेच्या समीपतर जी रेघ ती दूर-तर रेघेबरोबर आहे, पण असें होणें अशक्य हें पूर्वी सिद्ध झालेंच आहे.

९ सिद्धांत,प्रमेय.

वर्तुळांत ज्या बिंदूपासून दोहोंहून अधिक समान रेघा परिघापावेतों होतात तो मध्यबिंदु होय.

अबक एक वर्तुळ आहे. त्यांत ड बिंदूपासून परिघापर्यंत डअ, डब आणि डक अशा दोहोंहून अधिक समान रेघा होतात, तर ड हा मध्यबिंदु आहे.



ड मध्यबिंदु नाहीं, असें म्हटल्यास ई मध्यबिंदु आहे असें कल्पू. ड, ई बिंदु सांध. आणि डई रेघ परिघास मिळे तों पर्यंत दोहों अंगास वाढीव. ती रेघ ज्या बिंदूंत परिघास मिळते त्यांस फ आणि ग अशा संज्ञा दे. ई मध्यबिंदु आहे, म्हणून फग व्यास आहे. फग व्यासांत ड बिंदु घेऊन त्यापासून डक, डब आणि डअ ह्या रेघा काढल्या आहेत, त्यास (३ बु॰ ७व्या सि॰ प्र॰) व्यासाचा डग भाग ह्या सर्व रेघांपेक्षां मोठा आहे, डक रेघ डब पेक्षां मोठी आहे, व डब, डअ

पेक्षां मोठी आहे, पण डक डब आणि डअ ह्या रेषा तर मूळच्या बरोबर आहेत, तेव्हां डक डब पेक्षां मोठी होणें, व डब डअ पेक्षां मोठी होणें, हें अशक्य होय, म्हणून ई हा मध्यबिंदु नव्हे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल, कीं ड बिंदू शिवाय दुसरा कोणताही बिंदु मध्यबिंदु संभवणार नाहीं; म्हणून ड हाच मध्यबिंदु आहे.

टीप. हा सिद्धांत आकृति काढल्याशिवाय ही सहज सिद्ध करितां येतो, तो असा, कीं वर्तुळांत ज्या बिंदूपासून परिघापर्यंत दोहोंहून अधिक रेषा काढल्या असतां सर्व समान भरतात, तो मध्यान्ह बिंदु नव्हे, असें (२ बू. ७ व्या सि.) वरून स्पष्ट आहे, ह्याकरितां ड हाच मध्यबिंदु आहे.

१० सिद्धांत. प्रमेय.

कोणत्याही वर्तुळाचा परिघ दुसऱ्या वर्तुळाच्या परिघास दोहोंपेक्षां अधिक स्थळीं छेदीत नाहीं.

दोहों स्थळांपेक्षां अधिक स्थळीं छेदील असें म्हटल्यास फअब वर्तुळ डईक वर्तुळास, ब-ग आणि फ ह्या तीन स्थळीं छेदितें असें मानूं.

अ ब क वर्तुळाचा स मध्य काढ, आणि स ब, स फ आणि स ग बिंदु सांध. स ब, स-फ आणि स ग ह्या तिन्ही रेषा अ ब क वर्तुळा-च्या त्रिज्या आहेत, ह्याक-रितां त्या परस्पर बरोबर आहेत. ड ई फ वर्तुळांत स बिंदू पासून स ब,

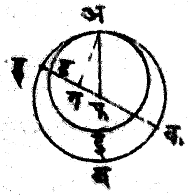
स ग आणि स फ अशा तीन रेषा परिघापर्यंत काढल्या आहेत, आणि त्या सर्व समान आहेत, ह्याकरितां (३ बु० ९ व्या सि० प्र०) स बिंदु ड-ई फ वर्तुळाचा मध्य आहे, परंतु ३ बुकाच्या पा-चव्या सिद्धांतांत असें सिद्ध केलें आहे, कीं जीं वर्तुळें परस्परांस छेदितात त्यांचा मध्यबिंदु एक नसतो, ह्या करितां स बिंदु दोन्ही वर्तुळांचा मध्य आहे, असें म्हणतां येत नाहीं, ह्यास्तव दोन वर्तुळें दोहोंपेक्षां अधिक स्थळीं परस्परांस कदापि छेदणार नाहींत.

११ सिद्धांत. प्रमेय.

एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या आंत असून त्यास स्पर्श करीत असल्यास, त्या दोन वर्तुळांचे

मध्य सांधणारी रेघ वाढविली, तर ती वर्तुल स्पर्शबिं-
दूंतून जाते.

अबक वर्तुळास त्याचे आंतील अडई वर्तुळ अ स्थळीं स्पर्श करिते, तर ह्या दोन्ही वर्तुळांचे मध्यबिंदु फ आणि ग ह्यांस सांधणारी जी फग रेघ ती वाढविली असतां अ वर्तुळस्पर्शबिंदूंतून जाईल, हें सिद्ध करावयाचें.



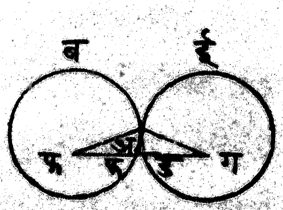
जाणार नाहीं, असें म्हटल्यास फग वाढविली असतां ड आणि ह ह्या बिंदूंतून जाते, असें मानूं. अ,ग आणि अ,फ बिंदु सांध. (१ बु० २० व्या सि० म०) अग आणि गफ ह्यांची बेरीज अफ पेक्षां मोठी आहे. फअ आणि फह बरोबर आहेत, कारण त्या अबक वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत, ह्यास्तव अग आणि गफ ह्यांची बेरीज फह पेक्षां मोठी आहे. गफ दोन्ही पेट्यांस साधारण आहे, ह्या करितां दोहोंकडून काढून टाक, तेव्हां अग रेघ गह पेक्षां मोठी आहे, पण अडई

वर्तुळाचा ग मध्य बिंदु आहे, ह्याकरितां अग, गड बरोबर आहे. म्हणून गड गह पेक्षां मोठी आहे, परंतु गड गह पेक्षां लहान आहे, हें स्पष्ट आहे, तेव्हां असें होणें अशक्य, म्हणून फ आणि ग ह्या मध्यबिंदूस सांधणारी रेघ वाढविली असतां अ स्पर्शबिंदु शिवाय दुसरे बिंदूतून जाणार नाहीं, तिला अ स्पर्शबिंदूतूनच गेलें पाहिजे.

१२ सिद्धांत. प्रमेय.

जीं दोन वर्तुळें परस्परांस बाहेरून स्पर्श करितात त्यांचे मध्यबिंदु सांधणारी रेघ वर्तुळस्पर्शबिंदूतून जाते.

अबक आणि अडई हीं दोन वर्तुळें परस्परांस बाहेरून अ बिंदुस्थळीं स्पर्शकरितात, त्यास त्यांचे फ आणि ग मध्यबिंदु सांधणारी फग रेघ अ स्पर्शबिंदूतून जातें, हें सिद्ध करावयाचें.



फग रेघ अ स्पर्शबिंदूंतून जात नाहीं, असें म्हटल्यास क आणि ड ह्या दोन बिंदूंतून जाते असें मानूं. अ,फ आणि अ,ग बिंदु सांध. फ अबक वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्या करितां अफ, फक बरोबर आहे, कारण त्या रेघा त्रि-ज्या आहेत. तसेंच ग अडई वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्या करितां अग गड बरोबर आहे, ह्याकरितां अफ आणि अग ह्यांची बेरीज फक आणि गड ह्यांच्या बेरजे बरोबर आहे, तेव्हां सगळी रेघ फग, अफ आणि अग ह्या दोन रेघांच्या बेरजेपेक्षां मोठी आहे, पण (१ बू० २० व्या सि० प्र०) ती त्या बेरजेपेक्षां लहान आहे, तेव्हां असें होणें अशक्य, ह्यास्तव फ आणि ग ह्या दोन मध्यबिंदूंस सांधणारी रेघ स्पर्शबिंदूंतूनच जाईल, दुसरे बिंदूंतून जाणार नाहीं, हें सिद्ध.

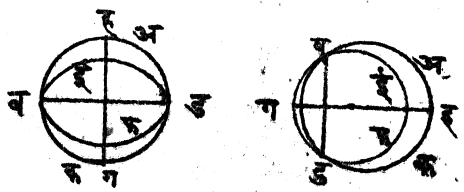
१२ सिद्धांत. प्रमेय.

एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळास एकापेक्षां अधिक बिंदूंत स्पर्श करीत नाहीं, मग तें आंतून स्पर्श करो, किंवा बाहेरून करो.

एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास एकापेक्षां अधिक बिंदूंत स्पर्श करील, असें म्हटल्यास ईवफ

वर्तुळ अबक वर्तुळास ब आणि ड ह्या दोन बिंदूंत आंतून स्पर्श करितें असें प्रथमतः मानूं.

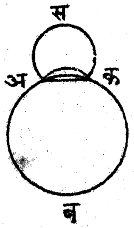
ब,ड बिंदु सांध.(१ बू०१० व्या सि०प्र०) बड रेषेचे दोन समान भाग कर, आणि (१ बू० ११ व्या सि० प्र०) बड च्या मध्यांतून



बड वर हग लंब कर. ब आणि ड हे दोन बिंदु दोन्ही वर्तुळांच्या परिघांत आहेत, ह्याकरितां त्यांस सांधणारी बड रेघ (३ बू० २ऱ्या सि० प्र०) दोन्ही वर्तुळांच्या आंत पडते. बड रेघेवर हग रेघ लंब आहे, व हग बडचे दोन समान भाग करिते, ह्याकरितां (३ बू० १ल्या सि० कु० प्र०) दोन्ही वर्तुळांचे मध्य हग रेघेंत आहेत, आणि ह्याकरितां ती रेघ (३ बू० ११ व्या सि० प्र०) वर्तुलस्पर्शबिंदूतून जावी, परंतु वर्तुळस्पर्शबिंदु तर त्या रेघेच्या बाहेरील अंगास आहेत, तेव्हां असें होणें अशक्य, ह्याकरितां एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास एका

पेक्षां अधिक बिंदूंत आंतून स्पर्श करणार नाहीं, हें सिद्ध.

आतां एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळास बाहेरचे अंगानें एका बिंदूपेक्षां ज्यास्त बिंदूंत स्पर्श करितें किंवा नाहीं, ह्या विषयीं विचार करूं.



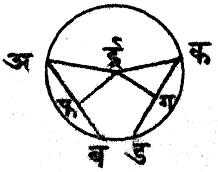
अ क स वर्तुळ अ ब क वर्तुळास अ आणि क ह्या दोन बिंदूंत बाहेरून स्पर्श करितें असें मानूं. अ, क सांध. अ क स वर्तुळाच्या परिघांत अ आणि क हे दोन बिंदु आहेत, ह्या करितां त्यांस सांधणारी रेघ अ क (३ बू॰ २ ज्या सि॰ प्र॰) अ क स वर्तुळांतच पडेल. अ क स वर्तुळ, अ ब क वर्तुळाचे बाहेर आहे, ह्या करितां अ क स वर्तुळांतील अ क रेघही अ ब क वर्तुळाच्या बाहेर आहे. अ ब क वर्तुळाच्या परिघांत अ आणि क हे दोन बिंदु आहेत, ह्या करितां त्यांस सांधणारी अ क रेघही अ ब क वर्तुळांत पडते; वर सिद्ध केलें, कीं ती पडत नाहीं, ह्या करितां एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास एका

बिंदूपेक्षां ज्यास्त बिंदूंत बाहेरून स्पर्श करिते, असें मानणें अयुक्तिक होय.

१४ सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुळांत ज्या ज्या परस्परबरोबर असतात, त्या मध्यापासून सारखे अंतरावर असतात, व सारखे अंतरावर ज्या ज्या असतात, त्या परस्पर बरोबर असतात.

अबडक वर्तुळांत **अब** आणि **कड** ह्या दोन ज्या परस्परबरोबर आहेत, त्यास त्या मध्यापासून सारखे अंतरावर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



अबडक वर्तुळाचा **ई** मध्य काढ, आणि त्यापासून **अब** आणि **कड** ह्या दोन ज्यांवर **ईफ** आणि **ईग** रेषा लंब कर. **अब** ज्येवर **ईफ** रेघ **ई** मध्यापासून लंब काढली आहे, ह्याकरितां (२ बू॰ २ ऱ्या सि॰ प्र॰) **अब** रेघेचे **ईफ** रेघ दोन समान भाग करिते. ह्याकरितां **अफ** **फब** बरोबर आहे, व **अब**, **अफ**च्या

दुपटी बरोबर आहे, ह्या प्रमाणेंच डक कग-चे दुप्पट आहे, असें सिद्ध होतें. अब, डक बरोबर आहे, ह्या करितां अफ, कग बरोबर आहे. अई रेघ ईक रेघे बरोबर आहे, ह्याकरितां अई चा वर्ग ईक च्या वर्गाबरोबर आहे. अफई त्रिकोणांत अफई कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) अई चा वर्ग अफ आणि ईफ ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, तसेंच ईगक त्रिकोणांत ईगक कोन काटकोन आहे, ह्या करितां ईक चा वर्ग ईग आणि कग ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे. अई चा वर्ग ईक च्या वर्गाबरोबर आहे, ह्या करितां अफ आणि ईफ ह्यांच्या वर्गांची बेरीज ईग आणि कग ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर आहे; अफ कग बरोबर आहे, ह्या करितां अफे, कगे बरोबर आहे, तेव्हां ईफे ईगे बरोबर आहे, हें उघड आहे. म्हणून ईफ ईग बरोबर आहे, म्हणून (३ बू० १५ व्या सि० प्र०) अब आणि कड ज्या मध्यापासून सारखे अंतरावर आहेत.

ज्या ज्या वर्तुलमध्यापासून सारखे अंतरावर असतात त्या परस्परबरोबर असतात ह्याविषयीं.

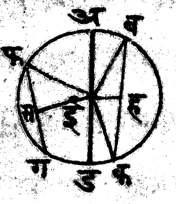
अब आणि कड ह्या दोन ज्या ई मध्यापासून सारखे अंतरावर आहेत, म्हणजे ईफ, ईग बरोबर आहे, त्यास अब कड बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें. पूर्वीप्रमाणेंच आकृति करून अब, अफच्या दुप्पट आहे, व कड कगच्या दुप्पट आहे, आणि अफ आणि फई ह्यांच्या वर्गांची बेरीज ईग आणि कग ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे, हें सर्व पूर्वीप्रमाणेंच सिद्ध होतें. आतां ईफ ईग बरोबर आहे, कारण ईफ ईग बरोबर आहे, म्हणून अफ, कग बरोबर आहे, हें स्पष्ट आहे, म्हणून अफ, कग बरोबर आहे. अफ, अबच्या अर्धाबरोबर आहे, आणि कग कडच्या अर्धाबरोबर आहे, ह्याकरितां अब कड बरोबर आहे.

१५ सिद्धांत. प्रमेय.

व्यास सर्व ज्यांमध्यें मोठा असतो. वर्तुलमध्याच्या समीपतर जी ज्या असते, ती वर्तुलमध्याच्या

दूरतर ज्येपेक्षां मोठी असते. महत्तर ज्या लघुतर ज्येपेक्षां मध्यापासून जवळ असते.

अडकब एक वर्तुळ आहे, त्याचा व्यास अड आहे, व मध्य ई आहे. फग ज्येपेक्षां बक ज्या मध्याजवळ आहे; त्यास अड व्यास बक ज्येपेक्षां मोठा आहे, व बक ज्या फग ज्येपेक्षां मोठी आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



ई मध्यापासून बक आणि फग ह्या दोन ज्यांवर ईह आणि ईस अनुक्रमें लंब कर, आणि ईब, ईक आणि ईफ बिंदु सांध. अई ईब बरोबर आहे, आणि ईड ईक बरोबर आहे, ह्याकरितां अड व्यास बई आणि ईक ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे. (१ बु० २० व्या सि० प्र०) बई आणि ईक ह्यांची बेरीज बक पेक्षां मोठी आहे, ह्याकरितां अड व्यास बक ज्येपेक्षां मोठा आहे.

फग रेषेपेक्षां बक रेषा ई मध्याजवळ आहे; ह्याकरितां (३ बु० १५ व्या सि० प्र०) ईह

लंब ईस लंबापेक्षां लहान आहे. १४ व्या सिद्धां-तांच्या सिद्धतेचा प्रकार लक्षांत आणिला अस-तां ही गोष्ट तेव्हांच लक्षांत येईल, कीं बक ज्या बह भागाच्या दुप्पट आहे, व फग ज्या फस भागाच्या दुप्पट आहे, आणि बह आणि ईह ह्यांच्या वर्गांची बेरीज फस आणि सई ह्यां-च्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर आहे. ईह, सई-पेक्षां लहान आहे, ह्याकरितां ईह चा वर्ग सई-च्या वर्गापेक्षां लहान आहे, आणि ह्याकरितां ब-ह चा वर्ग फसच्या वर्गापेक्षां मोठा आहे, म्हणून बह रेघ फस पेक्षां मोठी आहे. बह, बक ज्येचें अर्ध आहे, व फस, फग ज्येचें अर्ध आ-हे, ह्याकरितां बक, फग ज्येपेक्षां मोठी आहे.

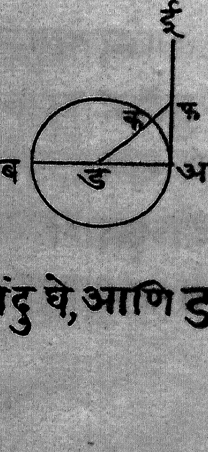
बक ज्या फग ज्येपेक्षां मोठी आहे, त्यास फग ज्येपेक्षां बक ज्या मध्यापासून ज-वळ आहे, म्हणजे ईह सई पेक्षां लहान आहे, हें सिद्ध करावयाचें. पूर्वीप्रमाणेंच आकृति केली आहे. बक फगपेक्षां मोठी आहे, ह्याकरितां बह रेघ फस पेक्षां मोठी आहे, म्हणून बहे, फसे पेक्षां मोठा आहे. बह आणि ईह ह्यांच्या

वर्गांची बेरीज फस आणि सई ह्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे; आणि बहे, फसे पेक्षां मोठा आहे, ह्या करितां ईह चा वर्ग सईच्या वर्गापेक्षां लहान आहे, म्हणून ईह लंब सई पेक्षां लहान आहे.

१६ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाचे व्यासावर त्याचे टोंकांतून लंब केला असतां तो वर्तुळाचे बाहेर पडतो, व तो लंब व वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मध्यें व्यासाच्या त्याच टोंकापासून रेघ काढली असतां ती रेघ वर्तुळास छेदल्या वांचून राहणार नाहीं.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्याचा मध्य ड आहे, आणि व्यास अब आहे. अब व्यासावर अ टोंकापासून अई लंब काढला आहे, त्यास अई लंब वर्तुळाचे बाहेरील अंगास आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

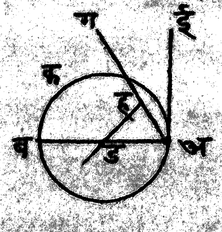


अई रेघेंत एक फ बिंदु घे, आणि ड, फ

बिंदु सांध. ड फ रेघ वर्तुळास क स्थळीं छेदिते. ड अ फ कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बु॰ ३२ व्या सि॰ प्र॰) तो अ फ ड कोनापेक्षां मोठा आहे, आणि ह्याकरितां (१ बु॰ १९ व्या सि॰ प्र॰) ड फ रेघ ड अ रेघेपेक्षां मोठी आहे. ड अ रेघ ड क बरोबर आहे, ह्याकरितां ड फ रेघ ड क पेक्षां मोठी आहे, ह्यावरून ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं फ बिंदु वर्तुळाबाहेर आहे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल, कीं अ ई रेघेंतील सर्व बिंदु वर्तुळाच्या बाहेर आहेत, म्हणून अ ई रेघ वर्तुळाच्या बाहेर आहे.

अ ई रेघ आणि अ ब क वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मध्यें अ ब व्यासाच्या अ टोंकापासून रेघ काढली असतां, ती वर्तुळास छेदील, हें सिद्ध करावयाचें.

अ टोंकापासून काटकोनापेक्षां लहान असा ड अ ग कोन करणारी एक अ ग रेघ काढ. अ ग रेघेवर ड मध्यापासून ड ह रेघ



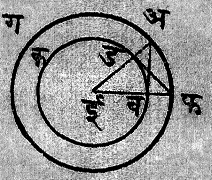
लंब कर. ड अ ह त्रिकोणांत ड ह अ कोन काटकोन आहे, ह्या करितां बाकीचे दोन्ही कोन काटकोनापेक्षां लहान आहेत, म्हणून अ ड ह कोन ड ह अ कोनापेक्षां लहान आहे, आणि ह्या करितां ड ह रेघ ड अ रेघेपेक्षां लहान आहे, म्हणून ह बिंदु वर्तुळामध्यें आहे म्हणून अ ग रेघ वर्तुळास छेदिते, हें स्पष्ट आहे.

कु॰ ह्यावरून स्पष्ट आहे, कीं त्रिज्येवर तिच्या टोंकापासून रेघ लंब केली असतां, ती वर्तुळास स्पर्श रेघ होते, आणि ती रेघ वर्तुळास एकच बिंदूंत स्पर्श करिते, कारण जर ती वर्तुळास दोन ठिकाणीं मिळाली तर ती (२ बू॰ २ऱ्या सि॰ प्र॰) वर्तुळाच्या आंत पडेल. आणखीही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं वर्तुळास एका बिंदूंत एकच रेघ स्पर्श करील, दोन रेघा स्पर्श करणार नाहींत.

१७ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळाच्या परिघा बाहेर किंवा परिघांत निक्षित बिंदु असतां त्यापासून त्या वर्तुळास स्पर्शरेघ काढावयाची.

बकड एक वर्तुळ आहे व त्याच्या बाहेर-ल्या अंगास एक अ बिंदु आहे, त्यास त्यापासून त्या वर्तुळास स्पर्श रेषा काढावयाची. बक-



ड वर्तुळाचा ई मध्य (३ बू० १ ल्या सि० प्र०) काढ, आणि अ, ई बिंदु सांध. ई मध्य धरून ई-अ त्रिज्येनें अफग वर्तुळ काढ. (१ बू० ११ व्या सि० प्र०) ईअ रेषेवर ड बिंदूंतून डफ लंब कर, आणि ई, फ आणि अ, ब सांध.

अफग आणि डबक ह्या दोन वर्तुळांचा मध्य ई बिंदु आहे, ह्याकरितां अई, ईफ बरोबर आहे, व डई ईब बरोबर आहे, आणि ह्याकरितां अबई आणि फडई ह्या दोन त्रिकोणांत अई आणि ईब ह्या दोन बाजू ईफ आणि डई ह्या दोन बाजूंबरोबर अनुक्रमें आहेत, व अई आणि ईब ह्यांच्या मधील कोन ईफ आणि डई ह्यांच्या मधील कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बू० ४ थ्या सि० प्र०) अबई आणि फडई हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत,

यास्तव फडई कोन अबई कोनाबरोबर आहे. फडई कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां अबई कोनही काटकोन आहे. ईब त्रिज्या आहे, आणि तीवर तिचे टोंकांतून अब लंब काढला आहे, ह्याकरितां (३ बू॰ १६ व्या सि॰ कु॰ प्र॰) अब रेघ कडब वर्तुळाची स्पर्शरेषा आहे, आणि अब रेघ वर्तुळाच्या परिघाबाहेरील जो अ बिंदु त्यांतून काढली आहे.

आतां बडक वर्तुळाच्या परिघांत ड बिंदु आहे. त्यास त्यांतून डबक वर्तुळास स्पर्शरेषा काढावयाची.

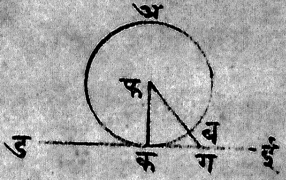
ड, ई बिंदु सांध, आणि डई वर डफ लंब काढ. डई त्रिज्या आहे, आणि तीवर तिचे टोंकांतून डफ लंब काढला आहे, ह्याकरितां (३ बू॰ १६ व्या सि॰ कु॰ प्र॰) डब, डबक वर्तुळाची स्पर्शरेषा आहे.

१८ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळास स्पर्शरेषा काढली असतां स्पर्शबिंदु व मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी रेघ त्या स्पर्शरेषेवर

लंब होते.

अबक वर्तुळास डई रेघ क स्थळीं स्पर्श करिते, त्यास क स्पर्शबिंदु आणि फ मध्यबिंदु ह्यांस सांधणारी फक रेषा डई स्पर्शरेषेवर लंब आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

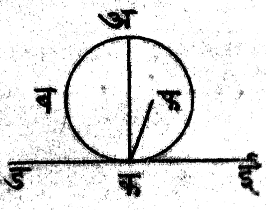


फक लंब नाहीं, असें म्हटल्यास फबग रेघ डईवर लंब आहे असें मानूं. फगक त्रिकोणांत फगक कोन काटकोन आहे, तेव्हां अर्थातच (१ बू० १७ व्या सि० प्र०) फकग कोन लघु आहे, आणि ह्याकरितां (१ बू० १९ व्या सि० प्र०) फक रेघ फग पेक्षां मोठी आहे, परंतु फक फब बरोबर आहे, ह्याकरितां फब रेघ फग पेक्षां मोठी आहे, पण लहान रेघ मोठ्या रेघेपेक्षां मोठी होणें हें अशक्य, ह्याकरितां फबग रेघ डई रेघेवर लंब नाहीं. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं फक शिवाय दुसरी कोणती रेघ डई वर लंब होणार नाहीं, म्हणून फक डई वर लंब आहे.

१९ सिद्धांत प्रमेय.

वर्तुळास स्पर्शरेषा काढून तीवर स्पर्शबिंदूतून एक लंब काढला असतां तो लंब वर्तुळमध्यांतून जातो.

अबक वर्तुळास डई स्पर्शरेषा काढून क स्पर्शबिंदूतून तीवर कअ लंब काढला आहे, त्यास कअ लंब मध्यबिंदूतून जातो, हें सिद्ध करावयाचें.



कअ लंब मध्यबिंदूतून जात नाहीं असें म्हटल्यास, कअ रेघेबाहेर फ मध्यबिंदु आहे असें मानूं. फ, क बिंदु सांध. अबक वर्तुळास डई रेघ स्पर्श करिते, आणि फक रेषा फ मध्यबिंदूपासून क स्पर्शबिंदूपर्यंत केली आहे, ह्याकरितां (३ बू. १८ व्या सि. प्र.) फक रेघ डईवर लंब आहे, आणि ह्याकरितां फकई कोन काटकोन आहे, परंतु अकई कोनही काटकोन आहे, ह्याकरितां फकई कोन अकई कोनां-

बरोबर आहे, परंतु लहान कोन मोठ्या कोनाबरोबर होणें अशक्य, ह्याकरितां फ बिंदु अ ब क वर्तुळाचा मध्य नाहीं. ह्या प्रमाणेंच अ क रेघे बाहेर जेवढे म्हणून बिंदु आहेत तेवढे वर्तुळमध्य नाहींत असें सिद्ध करितां येईल, ह्यास्तव अ ब क वर्तुळाचा मध्यबिंदु अ क रेघेंत आहे.

कु० मध्यबिंदूतून स्पर्शरेषेवर लंब काढला असतां तो लंब स्पर्शबिंदूतून जातो.

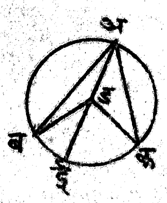
कारण मध्यापासून स्पर्शबिंदूपर्यंत रेघ काढली असतां ती स्पर्शरेषेवर लंब होते, ह्याकरितां ही रेघ आणि मध्यापासून स्पर्शरेषेवर काढलेली लंब रेघ ह्या एकमेकींशीं जमून जातील, म्हणून मध्यापासून स्पर्शरेषेवर रेघ लंब काढली असतां ती स्पर्श बिंदूतून जाते, हें उघड आहे.

टीप. अठरावा सिद्धांत, एकुणिसावा सिद्धांत व एकुणिसाव्या सिद्धांताची कुरलरी ह्यांवरून असें दिसून येतें, कीं मध्यांतून जाणें, स्पर्शरेषेवर लंब असणें, व स्पर्श बिंदूतून पार जाणें, ह्या तीन गुणांपैकीं ज्या रेघेच्या अंगीं दोन गुण असतात तिच्या अंगीं तिसरा गुण असतोच असतो.

२० सिद्धांत. प्रमेय.

मध्य कोण, तो ज्या कौंसावर असतो त्यावरच्या परिघ कोणाच्या दुप्पट असतो.

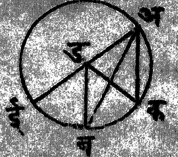
अबक एक वर्तुळ आहे, त्यांत बडक मध्य-कोणआहे, व बअक परिघ कोण आहे, आणि ते दोन्ही कोन बक कौंसावर आहेत, त्यास बडक मध्यकोण बअक परिघ कोणाच्या दुप्पट आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



ड मध्यबिंदु बअक कोनाच्या आंत आहे, असें प्रथमतः मानू. अ, ड सांध, आणि अड रेघ ई पर्यंत वाढीव. बड, अड बरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बु० ५ व्या सि० प्र०) अबड कोन बअड कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याकरितां अबड आणि बअड हे दोन्ही कोन मिळून बअड कोनाच्या दुप्पट आहेत. (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) बडई कोन अबड आणि बअड ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे, ह्याकरितां

बडई कोनही बअड कोनाच्या दुप्पट आहे. ह्या प्रमाणेंच कडई कोन कअई कोनाच्या दुप्पट आहे, असें सिद्ध होईल, ह्याकरितां बडक सगळा कोन बअक सगळ्या कोनाच्या दुप्पट आहे, हें स्पष्ट आहे.

आतां ड मध्य बअक परिघ कोणाच्या बाहेर आहे, असें मानूं.

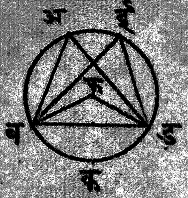


अ, ड सांध, आणि अड, ई पर्यंत वाढीव. विद्यार्थ्यानें वरील सिद्धांना लक्षांत आणिली असतां, त्याच्या नजरेस तेव्हांच येईल, कीं ईडक कोन ईअक कोनाच्या दुप्पट आहे, व ईडब कोन ईअब कोनाच्या दुप्पट आहे. आतां बडक कोन ईडक आणि ईडब ह्या दोन कोनांच्या वजाबाकी बरोबर आहे, व बअक कोन ईअक आणि ईअब ह्या दोन कोनांच्या वजाबाकीबरोबर आहे, तेव्हां बडक कोन बअक कोनाच्या दुप्पटीबरोबर आहे, हें स्पष्ट आहे.

२१ सिद्धांत. प्रमेय.

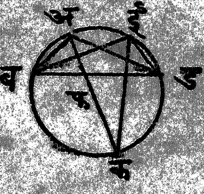
जे कोन एकाच वर्तुलखंडांत असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

अबकडई वर्तुळाच्या बअईड खंडांत बअड आणि बईड हे दोन कोन आहेत, त्यास ते परस्परबरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



अबकडई वर्तुळाचा फ मध्यबिंदु काढ. बअईड वर्तुलखंड अर्धवर्तुळापेक्षां मोठा आहे असें प्रथमतः मानूं. ब,फ आणि फ,ड सांध. बफड कोन मध्यकोण आहे, व बअड कोन परिघकोण आहे, आणि ते दोन्ही एकेच कौंसावर आहेत, ह्याकरितां (३ बू० २० व्या सि० प्र०) बफड कोन बअड कोनाच्या दुप्पट आहे, आणि ह्याच कारणास्तव बफड कोन बईड कोनाच्याही दुप्पट आहे, ह्या करितां बअड कोन बईड कोनाबरोबर आहे, हें उघड आहे

आतां ब अ ई ड वर्तुलखंड अर्धवर्तुला पेक्षां मोठा नाहीं असें मा-



नूं. ब अ ई ड ह्या वर्तुल खंडांत ब अ ड आणि ब ई ड असे दोन कोन आ- हेत, त्यास ते परस्पर बरोबर आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अ,फ सांध. अ फ रेघ क पर्यंत वाढीव, आणि क,ई सांध. ब अ ड क कोंस अर्ध व- र्तुलापेक्षां मोठा आहे, ह्याकरितां मागील प्रकारा- प्रमाणें ब अ क कोन ब ई क कोनाबरोबर आ- हे, आणि तसेंच क ब अ ड खंड अर्धवर्तुला- पेक्षां मोठा आहे, ह्याकरितां क अ ड कोन क- ई ड कोनाबरोबर आहे, म्हणून सगळा ब अ- ड कोन सगळ्या ब ई ड कोनाबरोबर आहे.

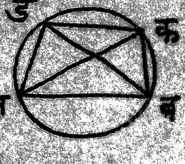
२२ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळांत चतुष्कोणाकृति काढली असतां तिच्या समोरासमोरच्या कोनांची बेरीज दोन काट कोनांबरोबर असते.

अ ब क ड वर्तुळांत अ ब क ड एक चतु

ष्कोणाकृति आहे, त्यास तिचे समोरासमोरच्या को-
नांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हें सि-
द्ध करावयाचें.

अ, क आणि ब, ड बिंदु सांध. अबक त्रिकोणाच्या कअब, अबक, आणि बकअ ह्या तीन कोनांची बेरीज (१ बू० ३२ व्या सि० प्र०) दोन काटकोनां बरोबर आहे. (३ बू० २१ व्या सि० प्र०) अडब कोन अकब कोनाबरोबर आहे, कारण ते दोन्ही कोन एकाच अडकब वर्तुलखंडांत आहेत, तसेंच बडक कोन कअब कोनाबरोबर आहे, म्हणून सगळा अडक कोन कअब आणि अकब ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. दोन्ही पेट्यांत अबक कोन मिळीव, म्हणजे अडक आणि अबक ह्या दोन कोनांची बेरीज कअब, अकब, आणि अबक ह्या तीन कोनांच्या बेरजेबरोबर होईल, पण ह्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, ह्याकरितां

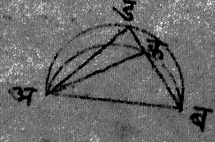


अडक आणि **अबक** ह्या दोन कोनांची बेरी-ज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हें सिद्ध ह्या प्रमाणेंच **डअब** आणि **डकब** ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, हें सिद्ध होतें.

२३ सिद्धांत. प्रमेय.

एकाच रेघेवर तिचे एकेच अंगास वर्तुळांचे दोन सजातीय खंड कदापि निराळे राहावयाचे नाहींत, ते परस्परांशीं मिळतील.

निराळे राहतील असें म्हटल्यास, **अब** रेघेवर तिचे एकेच अंगास **अकब** आणि **अडब** हे, वर्तुळांचे सजातीय दोन खंड निराळे राहातात असें मानूं.



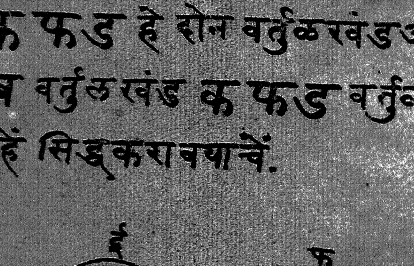
अकब वर्तुळ **अडब** वर्तुळास **अ** आणि **ब** ह्या दोन बिंदुस्थलीं छेदितें, ह्याकरितां (३ बु॰ १॰ व्या सि॰ प्र॰) हीं दोन वर्तुळें **अ** आणि **ब** ह्या दोन बिंदूंखेरीज तिसरे बिंदूंत परस्परांस छेदतील असें शक्य नाहीं, म्हणून, कोणता तरी एक वर्तुळखंड दुसरे वर्तुळखंडांस

अवश्य पडेल. अकब वर्तुलखंड अडब वर्तुलखंडांत पडतो असें मानूं. बकड रेघ काढ, आणि अ, ड आणि अ, क सांध. अकब खंड अडब खंडाशीं सजातीय आहे, ह्याकरितां (३ बू० ८ व्या सि० प्र०) अकब कोन अडब कोनाबरोबर आहे, परंतु (१ बू० १६ व्या सि० प्र०) बाहेरील कोन आंतील पलिकडच्या कोनाबरोबर होणें अशक्य.

२४ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळांचे जे सजातीय खंड समान रेघांवर असतात ते परस्पर बरोबर असतात.

अब आणि कड ह्या दोन समान रेघांवर अईब आणि कफड हे दोन वर्तुळखंड आहेत, त्यास अईब वर्तुलखंड कफड वर्तुळखंडाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



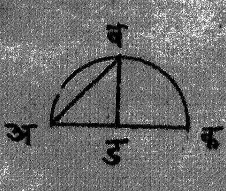
जर अईब खंड कफड खंडावर असा ठेविला, कीं अ बिंदु

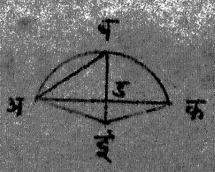
क बिंदूवर पडेल, आणि अब रेघ कड रेघे-वर पडेल. तर ब बिंदु ड बिंदूशीं मिळून जाईल, कारण अब रेघ कड रेघेबरोबर आहे, आणि ह्यास्तव अब रेघ कड रेघेशीं मिळते असें झालें, म्हणून (२ बू॰ २७ व्या सि॰ प्र॰) अईब खंड कफड खंडाशीं मिळाल्या शिवाय राहणार नाहीं, ह्या करितां अईब खंड कफड खंडाबरोबर आहे.

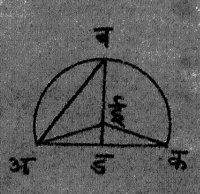
२५ सिद्धांत. कृत्य

विवक्षित वर्तुलखंडावरून ज्या वर्तुळाचा तो खंड आहे तें वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक वर्तुळखंड आहे. त्यास तो खंड ज्या वर्तुळाचा आहे तें वर्तुळ काढावयाचें.







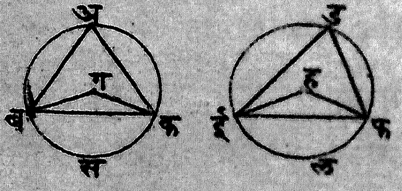
(१ बू॰ १॰ व्या सि॰ प्र॰) अक रेघेने ड स्थळीं दोन समानभाग कर, (१ बू॰ ११ व्या सि॰ प्र॰)

पेक्षां मोठा होईल, हें सर्व उघडच आहे.

२६ सिद्धांत-प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान कोन समान कौंसां-वर असतात, मग ते कोन परिघकोण असोत किंवा मध्य कोण असोत.

अबक आणि **डईफ** हीं दोन समान वर्तुळें आहेत. त्यांत **बगक** आणि **ईहफ** हे मध्य कोण समान आहेत, तसेंच **बअक** आणि **ईडफ** हे परिघ कोण परस्पर बरोबर आहेत, त्यास ते कोन समान कौंसांवर आहेत, म्हणजे **बसक**



कौंस **ईलफ** कौंसाशीं समान आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

ब,क आणि **ई,फ** सांध. **अबक** आणि **डईफ** हीं दोन वर्तुळें समान आहेत, म्हणून त्यांच्या मध्यबिंदूपासून परिघपर्यंत काढलेल्या रेषा परस्पर बरोबर आहेत, यास्तव **बग** आणि

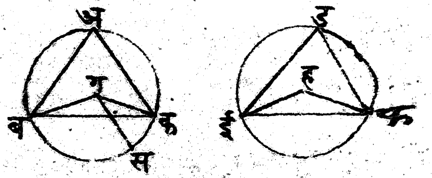
गक ह्या बाजू ईह आणि हफ ह्या बाजूंशीं बरोबर आहेत, व बगक अंतरकोन ईहफ अंतरकोनांबरोबर आहे, ह्यास्तव (१ बू॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰) बगक त्रिकोणाची बक बाजू ईहफ त्रिकोणाच्या ईफ बाजूबरोबर आहे. अ परिघकोण ड परिघकोणाबरोबर आहे, ह्याकरितां (३ बू॰ ८ व्या आ॰ व॰) बअक आणि ईडफ वर्तुळखंड सजातीय आहेत, परंतु ते खंड समान रेघांवर आहेत, ह्यास्तव (३ बू॰ २४ व्या सि॰ प्र॰) ते परस्पर बरोबर आहेत. अबक वर्तुळ डईफ वर्तुळाबरोबर आहे, ह्यास्तव बसक खंड ईलफ खंडा बरोबर आहे, हें अगदीं उघड आहे, म्हणून बसक कौंस ईलफ कौंसाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

२७ सिद्धांतप्रमेय.

समान वर्तुळांत समान कौंसांवर जे कोन असतात ते समान असतात, मग ते कोन परिघकोण असोत किंवा मध्यकोण असोत.

अबक आणि डईफ ह्या दोन

समान वर्तुळांत बगक आणि ईहफ हे मध्यकोण व बअक आणि ईडफ हे परिघकोण बक आणि ईफ ह्या समान कौंसांवर आहेत, त्यास बगक मध्यकोण ईहफ मध्यकोणा बरोबर आहे, व बअक परिघकोण ईडफ परिघकोणा बरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



बगक कोन ईहफ कोना बरोबर आहे, असें म्हटल्यास बअक कोन ईडफ कोना बरोबर आहे, हें (३ बू० २० व्या सि० व०) स्पष्ट आहे, परंतु ते कोन परस्पर बरोबर नाहींत असें म्हटल्यास, त्यांपैकीं एक कोणता तरी दुसऱ्यापेक्षां मोठा असलाच पाहिजे. त्यास बगक कोन ईहफ कोनापेक्षां मोठा आहे, असें मानूं. बग रेषेंत ग बिंदूजवळ (१ बू० २३ व्या सि० प्र०) ईहफ कोनाशीं समान असा बगस कोन कर. ३ बूकाच्या २६ व्या सिद्धांतांत असें सांगितलें आहे, कीं समान मध्यकोण समान कौंसांवर

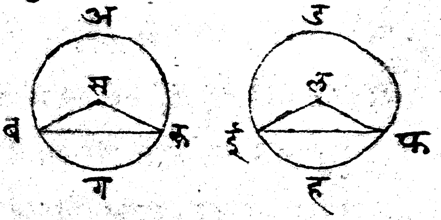
असतात, ह्याकरितां ब स कोंस ई फ कोंसाबरो-बर आहे, पण ब क कोंस ई फ कोंसाबरोबर आ-हे, ह्याकरितां ब स कोंस ब क कोंसाबरोबर आहे, परंतु लहान कोंस मोठ्या कोंसाबरोबर होणें अशक्य, म्हणून ब ग क आणि ई ह फ कोन असमान आहेत, असें म्हणतां येत नाहीं, त्यास ब ग क कोन ई ह फ कोनाबरोबर असलाच पाहिजे. ब अ-क कोन ब ग क कोनाच्या अर्धाबरोबर आहे, तसेंच ई ड फ कोन ई ह फ कोनाच्या अर्धा बरोबर आहे, ह्यास्तव ब अ क कोन ई ड फ कोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

२८ सिद्धांत. प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान ज्या समान कोंस करि-तात; महत्तर कोंस महत्तर कोंसाबरोबर होतो, आ-णि लघुतर कोंस लघुतर कोंसाबरोबर होतो.

अ ब क आणि ड ई फ हीं दोन समान वर्तुळें आहेत, आणि ब क आणि ई फ ह्या दोन समान ज्या आहेत, त्यास त्या ज्या समान कोंस करितात; महत्तर ब अ क कोंस महत्तर ई ड फ

कोंसाबरोबर आहे, व लघुतर बगक कोंस, लघुतर ईहफ कोंसाबरोबर आहे हें सिद्ध करावयाचें.

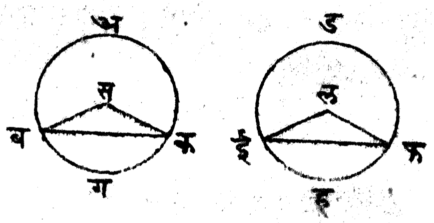


(१ बू० ३ या सि० प्र०) अबक आणि डईफ ह्या दोन वर्तुळांचे स आणि ल मध्य काढ, आणि ब, स स, क ई, ल आणि ल, फ सांध. आतां अबक आणि डईफ हीं वर्तुळें बरोबर आहेत, ह्याकरितां त्यांच्या त्रिज्या बरोबर आहेत, म्हणून बस, सक, ईल आणि ईफ ह्या बाजू बरोबर आहेत व बक ज्या ईफ ज्येबरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बू० ८ व्या सि० प्र०) बसक कोन ईलफ कोनाबरोबर आहे. (३ बू० २६ व्या सि० प्र०) समान मध्यकोण समान कोंसांवर असतात, ह्याकरितां बगक कोंस ईहफ कोंसाबरोबर आहे, आतां सगळें अबक वर्तुळ सगळ्या डईफ वर्तुळाबरोबर आहे, ह्याकरितां बअक कोंस ईडफ कोंसाबरोबर आहे, हें उघड आहे.

२९ सिद्धांत. प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान कोंसांच्या ज्या समान असतात.

अबक आणि डईफ दोन समान वर्तुळें आहेत, आणि त्यां मध्यें बगक आणि ईहफ हे दोन समान कोंस आहेत, त्यास त्यांच्या बक आणि ईफ ज्या परस्पर समान आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



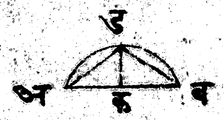
(१ बू० ३ ऱ्या सि० प्र०) अबक आणि डईफ वर्तुळांचे स आणि ल मध्यबिंदु काढ. ब,स क,स ई,ल आणि ल,फ सांध. समान वर्तुळांच्या त्रिज्या परस्पर बरोबर असतात, ह्याकरितां बस आणि कस त्रिज्या ईल आणि लफ त्रिज्यांबरोबर आहेत. बगक कोंस ईहफ कोंसाबरोबर आहे, ह्यास्तव (३ बू० २७ व्या सि० प्र०) बसक मध्यकोण ईलफ मध्यकोणाबरोबर आहे, त्यास बसक आणि

ईलफ ह्या दोन त्रिकोणांत बस आणि कस ह्या दोन बाजू ईल आणि लफ ह्या दोनबाजूंबरोबर आहेत, व बसक अंतरकोन ईलफ अंतरकोना बरोबर आहे, म्हणून (१ वू॰ ४थ्या सि॰प्रमाणें) बक बाजू ईफ बाजूबरोबर आहे, त्यास बगक कोंसाची बक ज्या त्या कोंसाबरोबरचा जो ईहफ कोंस त्याच्या ईफ ज्येबरोबर आहे, हें सिद्ध.

३० सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित कोंसाचे दोन समान भाग करावयाचे.

अबड एक कोंस आहे, त्यास त्याचे दोन समान भाग करावयाचे.



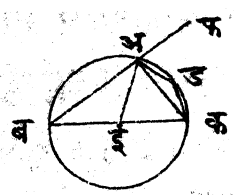
अबड कोंसाची अ आणि ब टोंकें अबरेषेनें सांध. (१ वू॰ १०व्या सि॰ प्र॰) अब ज्येचे क स्थलीं दोन समान भाग कर, क बिंदूतून अब ज्येवर कड लंब कर, आणि अड आणि बड सांध. अकड आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांत अक बाजू बक बाजूबरोबर आहे, कड बाजू

दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे, आणि अकड अंतरकोन बकड अंतरकोनाबरोबर आहे, ह्या करितां (१ बु॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰) अड ज्या बड ज्ये बरोबर आहे. समान ज्या समान कौंस करितात, आणि त्या कौंसांपैकीं मोठा कौंस मोठ्या कौंसाबरोबर असतो, आणि धाकटा कौंस धाकट्या कौंसाबरोबर असतो, असें २८ व्या सिद्धांतांत सांगितलें आहे, व अड आणि बड हे दोन्ही कौंस लहान आहेत, कारण कड रेघ (३ बु॰ १ ल्या सि॰ कु॰ प्र॰) मध्यांतून जाते, ह्यास्तव अड कौंस बड कौंसाबरोबर आहे, म्हणून अडब कौंसाचे ड स्थलीं दोन समान भाग झाले, हें सिद्ध.

३१ सिद्धांत. प्रमेय.

अर्धवर्तुलांत जो कोन होतो, तो काटकोन असतो, अर्धवर्तुलापेक्षां मोठ्या खंडांत जो कोन होतो, तो काटकोनापेक्षां लहान असतो, आणि अर्धवर्तुलापेक्षां लहान खंडांत जो कोन होतो, तो काटकोनापेक्षां मोठा होतो.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्याचा व्यास



बक व मध्यबिंदु ई आहे. अबक वर्तुळाचे अक रेषेनें अबक आणि अडक असे दोन खंड केले आहेत, ब,अ, अ,ड, आणि क,ड बिंदु सांधले आहेत, त्यास अबक अर्धवर्तुळांतील बअक कोन काटकोन आहे, अर्धवर्तुळापेक्षां मोठा जो अबक खंड त्यांतील अबक कोन काटकोनापेक्षां लहान आहे, व अर्धवर्तुळापेक्षां लहान जो अडक खंड त्यांतील अडक कोन काटकोनापेक्षां मोठा आहे, हें सिद्ध करावयाचें. अ,ई सांध, आणि बअ बाजू फ पर्यंत वाढीव. अई बाजू बई बाजूबरोबर आहे, कारण त्या दोन्ही बाजू त्रिज्या आहेत, ह्याकरितां (१ पु० ५ व्या सि० प्र०) अबई कोन बअई कोनाबरोबर आहे, तसेंच अई बाजू ईक बाजूबरोबर आहे, म्हणून अकई कोन ईअक कोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव सगळा बअक कोन अबक आणि अकब ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. अबक त्रिकोणाचा बाहे-

रील फ अ क कोन अ ब क आणि अ क ब ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे, ह्याकरितां ब अ क कोन फ अ क कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां ते दोन्ही कोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव अर्धवर्तुलांत जो कोन होतो तो काटकोन असतो, हें सिद्ध.

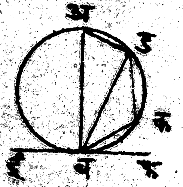
(१ बू॰ ३२ व्या सि॰ प्र॰) त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असते, तेव्हां अ ब क त्रिकोणांत ब अ क कोन काट-कोन आहे, ह्यास्तव अ ब क आणि ब क अ ह्या दोन कोनांची बेरीज एक काटकोनाबरोबर आहे, तेव्हां अ ब क कोन काटकोनापेक्षां कमी आहे, हें स्पष्टच आहे, म्हणून अर्धवर्तुलापेक्षां मोठ्या अ ब-क खंडांतील अ ब क कोन, काटकोनापेक्षां ल-हान आहे, हें सिद्ध. वर्तुलांतील चतुष्कोनाकृतीच्या समोरासमोरच्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरो-बर असते, असें ३ बू॰ २२ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, ह्यास्तव अ ब क ड चतुष्कोनाकृतीच्या अ-ब क आणि अ ड क ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे. अ ब क कोन काट-कोनापेक्षां लहान आहे, हें सिद्ध केलें आहे, तेव्हां अर्धा-

तव अडक कोन काटकोनापेक्षां मोठा आहे. अडक कोन अर्धवर्तुलापेक्षां लहान जो अडक खंड त्यांत आहे, ह्याकरितां अर्धवर्तुलापेक्षां लहान खंडांत जो कोन होतो, तो काटकोनापेक्षां मोठा असतो, हें सिद्ध.

२२ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाची स्पर्शरेषा आणि स्पर्शस्थलापासून केलेली ज्या ह्यांच्यामध्ये जे कोन सांपडतात ते वर्तुळाच्या व्युत्क्रम खंडांतील कोनांबरोबर असतात.

अबकड वर्तुळाची ईफ स्पर्शरेषा आहे, आणि ब स्पर्शबिंदूपासून बड ज्या केली आहे, त्यास ईफ स्पर्शरेषा आणि बड ज्या ह्यांच्यामध्ये



जे कोन सांपडले आहेत, ते व्युत्क्रमखंडांतील कोनांबरोबर आहेत, म्हणजे डबफ कोन डअब व्युत्क्रम खंडांतील कोनाबरोबर आहे, व डबई कोन डकब खंडांतील कोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

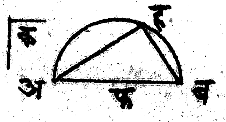
डकब एक चतुष्कोनाकृति आहे, त्यास (३ बू॰ २२ व्या सि॰ प्र॰) समोरासमोरच्या ड अ ब आणि डकब ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, (१ बू॰ १३ व्या सि॰ प्र॰) डबई आणि डबफ ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, ह्यास्तव बअड आणि डकब हे दोन कोन मिळून डबई आणि डबफ ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहेत. ब अड कोन डबफ कोनाबरोबर आहे, असें पूर्वीं सिद्ध केलेंच आहे, ह्या करितां ते समान कोन दोन्ही पैक्यांतून काढून टाकिलें असतां, बाकीचा डबई कोन डकब कोनाबरोबर होईल, आणि डकब कोन डकब व्युत्क्रम खंडात आहे.

२३ सिद्धांत. कृत्य.

ज्यांतील कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल असा एक वर्तुल खंड विवक्षित रेघेवर काढावयाचा.

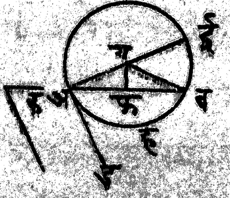
एक विवक्षित अब रेघ आहे, आणि क एक विवक्षित कोन आहे, त्यास अब रेघेवर असा

एक वर्तुलखंड काढावयाचा, कीं ज्यांतील कोन क कोनाबरोबर होईल.



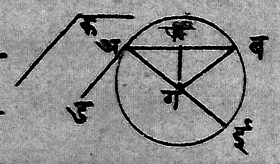
क कोन काटकोन आहे, त्या पक्षीं फ स्थलीं अब रेषेचे दोन समान भाग कर, आणि फ मध्य कल्पून फअ त्रिज्येनें अहब अर्धवर्तुल काढ, ह्यांतील अहब कोन (३ बू० ३१ व्या सि० प्र०) काटकोन आहे.

परंतु क कोन काटकोन नसल्यास, (१ बू० २३ व्या सि० प्र०) अब रेषेंत अ बिंदूजवळ क कोना एवढा बअड कोन कर. अब रेषेचे फस्थलीं दोनसमानभागकर.



आणि अड रेषेवर अ बिंदूंतून अई रेघ लंब काढ, नंतर फ बिंदूंतून अब वर फग रेघ लंब काढ, आणि ब, ग सांध. अफग आणि बफग ह्या दोन त्रिकोणांत अफ बाजू बफ बाजूबरोबर आहे, आणि फग बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे,

आणि अफग अंतरकोन बफग अंतरकोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव (१ बु० ४थ्या सि० प्र०) अग बाजू बग बाजूबरोबर आहे. आतां ग मध्यधरून गअ त्रिज्येनें वर्तुळ काढलें असतां, तें वर्तुळ ब बिंदूतून जाईल त्यास ह्याप्रकारचें अबह वर्तुळ काढ. अहब वर्तुळाचा व्यास ईअ रेघ आहे, हें स्पष्टच आहे. अई व्यासाच्या अ टोंकावर अड रेघ लंब आहे, ह्याकरितां (३ बु० १६व्या सि०

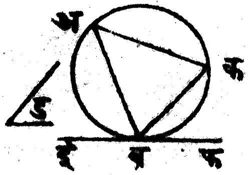


कु० प्र०) अड रेघ अबह वर्तुळाची स्पर्शरेषा आहे, तेव्हां अ स्पर्शबिंदूंतून अब रेघ काढली आहे असें ह्मणण्यास चिंता नाहीं, ती रेघ वर्तुळास छेदते, ह्याकरितां बअड कोन (३ बु० ३२व्या सि० प्र०) अहब व्युत्क्रमखंडांतील कोनाबरोबर आहे, आणि बअड कोन विवक्षित क कोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव विवक्षित अब रेघेवर, विवक्षित क कोनाबरोबर ज्यांतील कोन आहे असा अहब वर्तुळखंड काढला आहे.

३४ सिद्धांत.कृत्य.

वर्तुळाचा असा खंड पाडावयाचा कीं त्या खंडांतील कोन विवक्षित कोनाबरोबर होईल.

अबक एक वर्तुळ आहे, आणि ड एक कोन आहे, त्यास अबक वर्तुळाचा असा खंड पाडावयाचा कीं त्यांतील कोन ड कोनाबरोबर होईल.

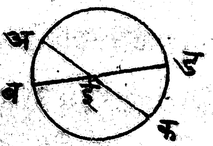


(१ बू॰ १७ व्या सि॰ प्र॰) अबक वर्तुळास ब बिंदूंत स्पर्श करील अशी एक ईफ रेघ काढ, आणि (१ बू॰ २३ व्या सि॰ प्र॰) ईफ रेघेंत ब बिंदूजवळ ड कोना एवढा फबक कोन कर. अबक वर्तुळास ईफ रेघ ब स्थळीं स्पर्श करिते, आणि ब स्पर्शबिंदूतून बक ज्या काढली आहे, ह्यास्तव (३ बू॰ ३२ व्या सि॰ प्र॰) फबक कोन बअक व्युत्क्रम खंडांतील कोनाबरोबर आहे, पण फबक कोन ड कोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव ज्यांतील कोन ड कोनाबरोबर आहे, असा अबक खंड अबक वर्तुळाचा पाडला असे.

३५ सिद्धांत.प्रमेय.

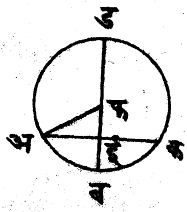
वर्तुळांत ज्या दोन रेषा परस्परांस छेदितात, त्यांच्या खंडांचे काटकोन चौकोन परस्परबरोबर असतात.

अबकड वर्तुळांत अक आणि बड ह्या दोन रेषा परस्परांस ई स्थळीं छेदितात, त्यास बड च्या बई आणि ईड ह्या दोन खंडांचा काटकोन चौकोन, अक रेषेच्या अई आणि ईक ह्या दोन खंडांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



अक आणि बड ह्या दोन रेषा मध्यबिंदूतून जातात त्या पक्षीं विचार. अक आणि बड मध्यबिंदूतून जातात, ह्याकरितां ई छेदनबिंदु मध्य आहे, आणि अई, ईक, बई व डई हे खंड परस्परबरोबर आहेत, ह्याकरितां अई व ईक ह्यांचा काटकोन चौकोन, बई आणि ईड ह्यांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हें उघडच आहे.

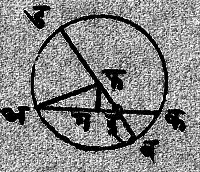
बड रेघ मात्र मध्यांतून जाते, आणि ती अक वर लंब होऊन तीस ई स्थळीं छेदते त्या पक्षीं. बड रेघेचे फ बिंदूंत दोन समान भाग कर. फ हा अबकड वर्तुळाचा मध्य होय. अ, फ सांध. बड रेघ अक ज्येवर लंब आहे, आणि



ती मध्यबिंदूंतून जाते, ह्याकरितां (३ बु॰ ३ ऱ्या सि॰ म॰) अई खंड कई खंडाबरोबर आहे. बड रेघेचे दोन समान भाग फ बिंदूंत झाले आहेत, आणि असमान दोन भाग ई स्थळीं झाले आहेत, ह्याकरितां (२ बु॰ ५ व्या सि॰ म॰) फब चा वर्ग डई आणि बई ह्यांचा काटकोनचौकोन आणि फई चा वर्ग, ह्यांबरोबर आहे. फब, अफ बरोबर आहे, ह्याकरितां अफ, डई आणि बई ह्यांचा काटकोनचौकोन, व फई चा वर्ग, ह्यांबरोबर आहे. (१ बु॰ ४७ व्या सि॰ म॰) अफ चा वर्ग अई आणि फई ह्यांबरोबर आहे, कारण अईफ काटकोन आहे, ह्यास्तव अई आणि फई मिळून डई आणि बई ह्यांचा काटकोनचौ-

कोन आणि फईचा वर्ग ह्यां बरोबर आहेत. दोन्ही पे-व्यांस फई साधारण आहे, तो काढून टाकिला अ-सतां अ ई, ड ई आणि ब ई ह्यांच्या काटकोन चौ-कोनाबरोबर राहील, म्हणजे अ ई आणि ई क ह्या खंडांचा काटकोन चौकोन ड ई आणि ब ई ह्या खंडांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे हें सिद्ध.

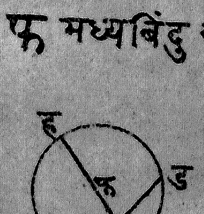
ब ड मात्र मध्यबिंदूंतून जाते, आणि ती अ-क रेषेस ई स्थळीं छेदते, पण ती तीवर लंब होत ना-हीं. त्यापक्षीं पूर्वीप्रमाणेंच ब ड रेषेचे फ स्थळीं दोन समान भाग कर. फ हा मध्य होय. अ, फ



सांध, आणि (१ बु० १२ व्या सि० म०) फ बिंदूपासून अकवर फ ग लंब काढ. (३ बु० ३ ऱ्या सि० म०) अ ग, क ग बरोबर आहे, आणि ह्याकरितां अ-गे, अ ई × ई क काटकोन चौकोन आणि ग ई ह्यां बरोबर आहे. दोन्ही पेक्ष्यांत ग फे मिळीव, तेव्हां अगे आणि फगे मिळून अ ई × ई क काटकोन चौकोन ग ई आणि फ गे ह्यां बरोबर आहेत. अ-गे, आणि फ गे मिळून अ फे बरोबर आहेत, तसेंच

फग आणि गई मिळून फई बरोबर आहे, त्यास अफ, अई × ईक काटकोनचौकोन आणि फई ह्यांबरोबर आहे. अफ फब बरोबर आहे, म्हणून फब अई × ईक काटकोनचौकोन आणि फई ह्यांबरोबर आहे; फब, ईड × ईब काटकोनचौकोन आणि फई ह्यांबरोबर आहे, ह्याकरितां ईड × बई काटकोनचौकोन आणि फई मिळून अई × ईक काटकोनचौकोन आणि फई ह्यांबरोबर आहेत. दोन्ही पक्ष्यांस फई साधारण आहे, तो काढून टाकिला असतां, ईड × बई काटकोनचौकोन अई × ईक काटकोन चौकोनाबरोबर राहील.

दोन्ही रेघा वर्तुळमध्यांतून जात नाहींत, त्या पक्षीं. अबकड वर्तुळाचा फ मध्यबिंदु काढ, आणि अक आणि बड ह्यांच्या ई छेदनबिंदूंतून हफईग एक व्यास काढ.



मागें सिद्ध केलें आहे, कीं अई × ईक काटकोनचौकोन हई × ईग काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, तसेंच ड-

ई×बई काटकोनचौकोन हई×ईग काट-कोनचौकोनाबरोबर आहे, ह्यावरून स्पष्टच दिसतें, कीं अई× ईक काटकोनचौकोन बई×ईड काटकोनचौकानाबरोबर आहे.

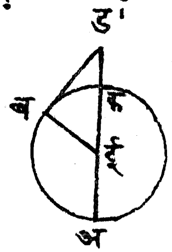
३६ सिद्धांत.प्रमेय.

कोणत्याही वर्तुळाच्या बाहेरल्या अंगास एक बिंदु घेऊन त्यापासून त्या वर्तुळास एकस्पर्शरेषा व एक छेदनरेषा काढली तर छेदनरेषा आणि वर्तु-ळाबाहेरील तिचा भाग ह्यांचा काटकोन चौकोन स्पर्शरेषेच्या वर्गाबरोबर होतो.

अबक एक वर्तुळ आहे, त्याच्या बाहेरल्या अंगास ड बिंदु घेऊन त्यापासून त्या वर्तुळास ड-ब स्पर्शरेषा केली आहे व डकअ एक छेदनरेषा केली आहे, त्यास डकअ छेदन रेषाआणि ति-चा वर्तुळा बाहेरील डक भाग ह्यांचा काटकोनचौ-कोन डब स्पर्शरेषेच्या वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध-करावयाचें.

डकअ छेदनरेषा ई वर्तुळमध्यबिंदूतून जा-ते त्यापक्षीं ब, ई सांध. (३ बू० १८ व्या सि० प्र०)

ड ब ई कोन काटकोन आहे. अ क बाजूचे ई स्थळीं दोन समान भाग करून, ती ड बिंदूपर्यंत वाढविली आहे, ह्याकरितां (२ बू० ६ व्या सि० प्र०) अ ड × क ड काटकोन चौकोन आणि क ई

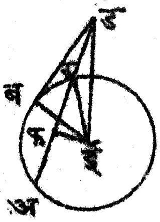


मिळून ड ई बरोबर आहेत. क ई, ब ई बरोबर आहे, ह्याकरितां अ ड × क ड काटकोन चौकोन आणि ब ई मिळून ड ई बरोबर आहेत. (१ बू० ४७ व्या सि० प्र०) ड ई, ब ड आणि ब ई ह्यां बरोबर आहे, ह्यास्तव अ ड × क ड काटकोन चौकोन आणि ब ई, ब ड आणि ब ई ह्यां बरोबर आहेत, ब ई दोन्ही पक्षांस साधारण आहे, ह्याकरितां तो दोहींकडून काढून टाक, तेव्हां अ ड × क ड काटकोन चौकोन ब ड बरोबर आहे, हें सिद्ध.

ड क अ छेदन रेषा ई मध्यबिंदूतून जात नाहीं, त्या पक्षीं विचार. (१ बू० १२ व्या सि० प्र०) अ क रेषेवर ई मध्यापासून ई फ लंब कर, आणि ई, ब, ई, क आणि ई, ड सांध. (३ बू० ३ व्या सि० प्र०) ई फ रेष अ क ज्येचे दोन

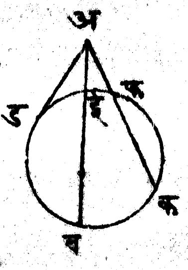
समान भाग करते, कारण ईफ रेघ ई मध्यांतून अक वर लंब केली आहे, म्हणून अफ रेघ फक बरोबर आहे.

अक रेघेचे फ स्थळीं दोन समान भाग झाले आहेत, व ती ड बिंदुपर्यंत वाढविलेली आहे, ह्याकरितां फड, अड × कड काटकोन चौकोन आणि फके ह्यां बरोबर आहे, दोन्ही पेक्ष्यांत फई मिळीव, तेव्हां फडे आणि फई, अड × कड काटकोन चौकोन फके आणि फई ह्यांबरोबर आहेत. डफई कोन काटकोन आहे, ह्यास्तव फडे आणि फई हे ईडे बरोबर आहेत, तसेंच फके आणि फई कई बरोबर आहेत, म्हणून ईडे अड × कड काटकोन चौकोन आणि कई ह्यां बरोबर आहे. कई, बई बरोबर आहे, ह्या करितां ईडे अड × कड काटकोन चौकोन आणि बई ह्यां बरोबर आहे, पण डबई कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां बडे आणि बई, ईडे बरोबर आहे, त्यास बडे आणि बई, अड × कड काटकोन चौकोन आणि बई ह्या बरोबर



आहेत. दोन्ही पेक्षांस बई² साधारण आहे, त्यास तो काढून टाकिला असतां बड² वर्गाबरोबर अड × कड काटकोनचौकोन राहतो, हें सिद्ध.

कु० वर्तुळाबाहेर एक बिंदु घेऊन त्यापासून दोन छेदनरेषा काढल्या असतां, त्या छेदनरेषा आणि त्यांचे बाहेरील भाग ह्यांचे काटकोनचौकोन परस्परबरोबर होतात. बकफई वर्तुळाच्या बाहेर अ बिंदु घेऊन त्यापासून अईब आणि अफक दोन छेदन रेषा केल्या आहेत,

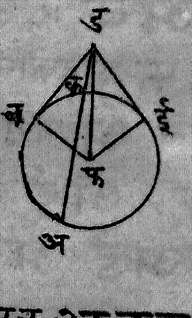


त्यास अब × अई काटकोनचौकोन, अक × अफ काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें. अ पासून अड स्पर्शरेषा काढ. अड² अब × अई काटकोनचौकोनाबरोबर आहे. तसेंच अड² अक × अफ काटकोनचौकोना बरोबर आहे, ह्यास्तव अब × अई काटकोनचौकोन अक × अफ बरोबर आहे हें सिद्ध.

३७ सिद्धांत.प्रमेय.

वर्तुळाबाहेर एक बिंदु घेऊन त्यापासून एक छेदन रेषा काढली व वर्तुळास मिळणारी अशी एक रेषा काढली, आणि जर ती छेदनरेषा आणि तिचा बाहेरील भाग ह्यांचा काटकोनचौकोन वर्तुळास मिळणाऱ्या रेषेच्या वर्गाबरोबर होईल तर ती रेघ त्या वर्तुळाची स्पर्शरेषा होय.

अबकई एक वर्तुळ आहे, आणि त्याच्या बाहेर एक ड बिंदु घेऊन त्यापासून डकअ छेदन रेषा काढली आहे, आणि डब रेघ वर्तुळास मिळेशी काढली आहे, आणि अड × कड काटकोन चौकोन बड च्या वर्गाबरोबर आहे, त्यास बड रेघ स्पर्शरेषा आहे,



हें सिद्ध करावयाचें. ड बिंदूपासून अबक वर्तुळास (३ बू० १७ व्या सि० प्र०) डई स्पर्शरेषा काढ. फ मध्यबिंदु काढ, आणि फ,ई फ,ड आणि फ,ब सांध. (३ बू० १८ व्या सि० प्र०) फईड कोन

काटकोन आहे. ड अ रेघ अ ब क वर्तुळास छेदते, आणि ड ई त्यास स्पर्श करिते, ह्याकरितां (३ बू॰ ३६ व्या सि॰ प्र॰) अड × कड काटकोनचौकोन डई बरोबर आहे, आणि अड × कड काटकोनचौकोन डबे बरोबर आहे, हें गृहीत आहे, ह्याकरितां डई डबे बरोबर आहे, म्हणून डई बड बरोबर आहे. ड ब फ आणि ड ई फ ह्या दोन त्रिकोणांत डब, डई बरोबर आहे, ब फ, ई फ बरोबर आहे, कारण त्या दोन्ही त्रिज्या आहेत, आणि ड फ दोहोंस साधारण आहे, ह्याकरितां (१ बू॰ ८ व्या सि॰ प्र॰) ड ब फ कोन ड ई फ कोनाबरोबर आहे, पण ड ई फ कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां ड ब फ कोनही काटकोन आहे. ब फ त्रिज्येवर बड लंब आहे, ह्याकरितां (३ बू॰ १६ व्या सि॰ प्र॰) ड ब रेघ अ ब क वर्तुळास स्पर्श करिते, हें सिद्ध.

कु॰ ह्यावरून सिद्ध होतें, कीं एके बिंदूपासून वर्तुळास दोन स्पर्शरेषा केल्या असतां त्या बरोबर असतात.

३ बुकाचे प्रश्न.

१ वर्तुळमध्यांतून जाणारी जी रेघ ज्येचे दोन समान भाग करिते किंवा तीवर लंब होते, ती रेघ त्या ज्येशीं ज्या दुसऱ्या ज्या समांतर असतात, त्यांचे ही समान दोन दोन भाग करिते, व त्यांवर लंब होते.

२ जीं दोन वर्तुळें परस्परांस छेदितात, त्या वर्तुळांचे मध्यबिंदूंस सांधणारी रेघ, त्यांच्या छेदन बिंदूंस सांधणाऱ्या रेघेवर लंब होते, आणि ती तिचे समान दोन भाग करिते.

३ दोन वर्तुळांनीं परस्परांस छेदिलें असतां, आणि त्यांच्या एका छेदनबिंदूपासून दोन्ही वर्तुळांत दोन व्यास काढिले असतां, त्या व्यासांचीं दुसरीं टोकें आणि वर्तुळांचा दुसरा छेदनबिंदु हीं तिन्ही एका सरळ रेघेंत येतात.

४ वर्तुळांत दोन समांतर ज्यांचे जी रेघ समान दोन दोन भाग करिते, ती त्यांवर लंब होते.

५ दोन समकेंद्र वर्तुळांस छेदून जाणारी अशी एक रेघ केली असतां, त्या रेघेचे त्या वर्तुळांच्यामध्यें जे भाग सांपडतात, ते परस्परबरोबर असतात.

६ वर्तुलमध्यांतून जाणें, ज्येचे दोन समान भाग करणें, तीवर लंब असणें, ज्येवरील मध्यकोणाचे दोन समान भाग करणें, आणि ज्येच्या कौंसाचे दोन समान भाग करणें, ह्या पांच गुणांपैकीं दोन गुण ज्या रेषेचे अंगीं असतात तिच्या अंगीं इतर तीन गुण असतात.

७ कोणत्याही एका वर्तुळाच्या त्रिज्येवर वर्तुळ काढलें असतां हें वर्तुळ आणि पहिलें वर्तुळ हीं ज्या बिंदूंत मिळतात, त्या बिंदूतून पहिलें वर्तुळांत ज्या काढली असतां, त्या ज्येचे दुसरें वर्तुळ दोन समान भाग करितें, म्हणजे त्या ज्येचे दुसरे वर्तुळाच्या कौंसावर दोन भाग समान होतात.

८ वर्तुळांतील चतुष्कोणाकृतीचा बाहेरील कोन आंतील पलीकडच्या कोनाबरोबर असतो.

९ वर्तुळांत समांतर ज्या केल्या असतां, त्यांच्या मध्यें जे कौंस सांपडतात, ते परस्पर बरोबर असतात.

१० जीं दोन वर्तुळें परस्परांस स्पर्श करितात, मग तीं परस्परांस बाहेरून स्पर्श करोत किंवा एक दुसऱ्याच्या आंत असून त्यास स्पर्श करो, त्यांच्या स्पर्श

बिंदूतून दोन रेषा काढल्या असतां, त्यांच्या मध्यें जे वर्तुळांचे कोंस सांपडतात, त्यांच्या ज्या परस्पर समांतर असतात.

११ वर्तुळांत ज्येशीं स्पर्शरेषा समांतर केली असतां त्यांच्यामध्यें जो कोंस सापडतो त्याचे स्पर्शस्थलीं दोन भाग समान होतात.

१२ दोन समकेंद्र वर्तुळांमध्यें मोठ्या वर्तुळाची जी ज्या लहान वर्तुळास स्पर्श करिते तिचे स्पर्शस्थलीं दोन भाग समान होतात.

१३ दोन विवक्षित बिंदूतून जाऊन विवक्षित वर्तुळास छेदणारीं अशीं कितींहीं वर्तुळें केलीं आणि प्रत्येकाचे छेदन बिंदु सांधून रेषा काढल्या तरत्या एका बिंदूंत मिळतात.

१४ दोन विवक्षित बिंदूतून जाऊन विवक्षित वर्तुळास स्पर्श करील असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

१५ वर्तुळांत ज्या दोन ज्या एकमेकींवर लंब असून परस्परांस छेदितात, त्या ज्यांच्या चारखंडाच्या वर्गांची बेरीज व्यासाच्या वर्गाबरोबर होते.

१६ दोहों अंगांनीं वाढविलेल्या ज्येवर वर्तुळाचे व्यासाच्या टोंकांपासून लंब काढले असतां ज्येचीं

टोंकें व लंब ह्यांच्यामध्यें जे खंड सांपडतात ते समान असतात.

१७ कोणत्याही त्रिकोणाचा शिरकोन पाया आणि उंची हीं तीन कळली असतां त्यांच्या योगानें तो त्रिकोण काढावयाचा.

१८ वर्तुळांत ज्येशीं समांतर व्यासामध्यें कोठें तरी बिंदु घेऊन तेथपर्यंत त्या ज्येचे टोंकांपासून दोन रेघा काढल्या असतां त्यांच्या वर्गांची बेरीज व्यासाच्या दोन खंडाच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर होते.

१९ त्रिकोणाचा शिरकोन पाया, आणि दुसऱ्या दोन बाजूंची बेरीज इतकीं समजलीं असतां त्यापासून तो त्रिकोण काढावयाचा.

२० परस्परांस छेदणाऱ्या अशा दोन वर्तुल स्पर्श रेषांचे स्पर्शबिंदु सांधून त्या स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूपासून वर्तुळांत एक छेदनरेषा केली असतां, तिचे तीन भाग होतात, त्यास छेदन रेषा आणि तिचा मध्यभाग ह्यांचा काटकोनचौकोन तिच्या अंत्यभागांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर होतो.

२१ वर्तुळांतील चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू वाढविल्या असतां त्या ज्या बिंदूंत मिळतात,

त्यांस सांधणाऱ्या रेषेचा वर्ग, त्या बिंदूपासून वर्तु- ळास दोन स्पर्श रेषा केल्या असतां त्यांच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर होतो.

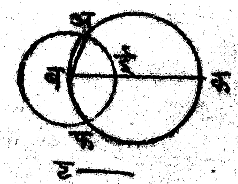
बूकचवथें.

१ सिद्धांत.कृत्य.

वर्तुळांत, त्याच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणाऱ्या अशा रेघे एवढी एक रेघ काढावयाची.

अबक एक वर्तुळ आहे, व ड एक रेघ आहे. ती रेघ अबक वर्तुळाच्या व्यासापेक्षां मोठी नाहीं, त्यास अबक वर्तुळांत ड रेघे एवढी एक ज्या काढावयाची.

अबक वर्तुळाचा बक व्यास काढ. बक व्यास ड रेघेबरोबर असल्यास अबक वर्तुळांत ड रेघे एवढी बक रेघ काढली असें होईल,



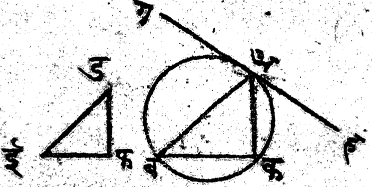
परंतु बक व्यास ड बरोबर नसल्यास बक व्यास ड रेघेपेक्षां मोठा आहे. (१ बु० ३ ऱ्या सि० न०) ड रेघेबरोबर बक व्यासाचा बई तुकडा कर. ब मध्य धरून बई त्रिज्येनें अफई वर्तुळ काढ, आणि ब,अ सांध. अफई वर्तुळाचा ब मध्य आहे, ह्याकरितां बअ, बई बरोबर

आहे, व ड रेष ब ई बरोबर आहे, ह्याकरितां ड ब-अ बरोबर आहे, म्हणून अ ब क वर्तुळांत ड रेषे एवढी अ ब काढली असे.

२ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत विवक्षित त्रिकोणाशीं समकोण असा एक संलग्न+ त्रिकोण काढावयाचा.

अ ब क एक वर्तुळ आहे, आणि ड ई फ एक त्रिकोण आहे, त्यास ड ई फ त्रिकोणाशीं समकोण असा एक संलग्न त्रिकोण अ ब क वर्तुळांत काढावयाचा.



(३ बु॰ १७ व्या सि॰ प्र॰) अ ब क वर्तुळास अ स्थळीं ग अ ह स्पर्शरेषा काढ. (१ बु॰ २३ व्या सि॰ प्र॰) अ ह रेषेंत अ बिंदू जवळ ड ई फ त्रिकोणाच्या ई कोना बरोबर

+ लागून राहणारा.

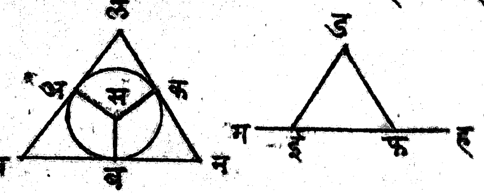
ह अ क कोन कर; तसेंच अ ग रेघेंत अ बिंदू जवळ फ कोनाबरोबर ग अ ब कोन कर. आणि ब, क सांध. ग अ ह रेघ अ ब क वर्तुळास अ स्थळीं स्पर्श करिते, आणि अ क रेघ अ स्पर्श स्थळापासून काढली आहे, ह्यास्तव (३ बु० ३२ व्या सि० प्र०) ह अ क कोन अ ब क उत्क्रमखंडांतील ब कोनाबरोबर आहे, तसेंच ग अ ब कोन क कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ ब क त्रिकोणाचे ब आणि क हे दोन कोन ड ई फ त्रिकोणाच्या ई आणि फ ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत, आणि ह्याकारणास्तव (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) ब अ क कोन ई ड फ कोनाबरोबर आहे, म्हणून अ ब क त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणाशीं समकोण आहे, तेव्हां अ ब क वर्तुळांत ड ई फ त्रिकोणाशीं समकोण असा अ ब क संलग्न त्रिकोण काढला असे.

३ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळाभोंवती विवक्षित त्रिकोणाशीं समकोण असा एक संलग्न त्रिकोण काढावयाचा.

अबक एक वर्तुळ आहे, आणि डईफ विवक्षित त्रिकोण आहे, त्यास अबक वर्तुळाभोंवती डईफ त्रिकोणाशीं समकोण असा एक संलग्न त्रिकोण काढावयाचा.

ईफ बाजू दोहीं अंगास ग आणि ह बिंदू पर्यंत वाढीव.



अबक वर्तुळाचा स मध्य बिंदु काढ, आणि त्यापासून सब एक रेघ काढ. (१ बु० २३ व्या सि० प्र०) बस रेघेंत स बिंदूजवळ डफह कोना एवढा बसक कोन कर; तसेंच डईग कोनाबरोबर बसअ कोन कर. (२ बु० १७ व्या सि० प्र०) अ, ब आणि क ह्या तीन बिंदूंतून लम, मन आणि नल अशा तीन स्पर्शरेषा अनुक्रमें काढ. लम, मन आणि नल ह्या रेघा अबक वर्तुळास अनुक्रमें अ, ब आणि क ह्या बिंदुस्थानीं स्पर्श करितात, आणि अ, ब आणि क ह्या बिंदूंतून स मध्यबिंदूपर्यंत अस, बस आणि कस रेघा काढल्या आहेत, त्यास

तीन बिंदूंजवळील कोन काटकोन आहेत. अमबस ह्या चतुष्कोनाच्या चारकोनांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर आहे, व मअस आणि सबम हे दोन कोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव बाकीचे अमब आणि बसअ ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे. (१ बु॰ १२ व्या सि॰ प्र॰) डईग आणि डईफ ह्या दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर आहे, ह्यास्तव अमब आणि बसअ हे दोन कोन डईग आणि डईफ ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत, परंतु बसअ कोन डईग कोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव अमब कोन डईफ कोनाबरोबर आहे, हें स्पष्ट आहे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं कनब कोन डफई कोनाबरोबर आहे. लमन त्रिकोणाचे म आणि न हे दोन कोन डुईफ त्रिकोणाच्या ई आणि फ ह्या दोन कोनांबरोबर आहेत, हें सिद्ध झालें, ह्याकरितां (१ बु॰ ३२ व्या सि॰ प्र॰) लमन त्रिकोणाचा तिसरा कोन लडईफ त्रिकोणाच्या ड कोना-

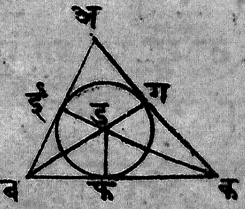
बरोबर आहे, ह्यास्तव लमन त्रिकोण डईफ त्रिकोणाच्या समकोण आहे, आणि तो अबक वर्तुळाच्या भोंवती संलग्न काढला असे.

४ सिद्धांत. कृत्य.

त्रिकोणांत संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्यांत संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

बड रेघेनें अबक कोनाचे दोन समान भाग कर, व कड रेघेनें अकब कोनाचे दोन समान भाग कर, आणि बड आणि कड ह्या दोन रेघांच्या ड छेदन



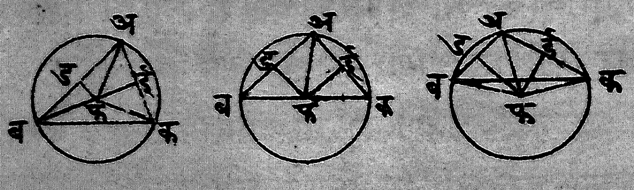
बिंदूपासून डफ, डई आणि डग ह्या तीन रेघा बक, अब आणि अक ह्या तीन बाजूंवर अनुक्रमें लंब काढ. ईबड आणि फबड ह्या दोन त्रिकोणांत ईबड कोन फबड कोना बरोबर आहे, कारण बड रेघेनें अबक कोनाचे दोन समान भाग केले आहेत. बईड कोन बफड

आहेत, आणि बड बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधार-
ण आहे, ह्याकरितां (१ बु० २६ व्या सि० प्र०) ई-
बड त्रिकोणाची डई बाजू फबड त्रिकोणा-
च्या डफ बाजू बरोबर आहे; ह्याप्रमाणेंच डग
बाजू डफ बाजू बरोबर आहे, हें सिद्ध होतें, ह्या-
करितां डई, डफ आणि डग ह्या तीन रेघा
परस्पर बरोबर आहेत. ड मध्य कल्पून ह्या तीन
रेघांपैकीं कोणत्याही एका रेघेनें वर्तुळ काढलें अ-
सतां, तें बाकीच्या दोन रेघांच्या शेवटांतून जाईल, व
अब, बक आणि कअ ह्या तीन रेघांस अनु-
क्रमें ई, फ आणि ग ह्या तीन बिंदूंत स्पर्श क-
रील, कारण ई, फ आणि ग ह्या तीन बिंदूंज-
वळील कोन काटकोन आहेत, आणि (३ बु० १६
व्या सि० प्र०) त्रिज्येच्या टोंकावर जी रेघ लंब अ-
सते, ती वर्तुळास स्पर्श करिते, म्हणून अब, बक
आणि अक ह्या रेषा ईफग वर्तुळास स्पर्श करि-
तात, आणि ईफग वर्तुळ अबक त्रिकोणां-
त संलग्न काढलें असे.

त्रिकोणा सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्यास त्या सभों-
वती वर्तुळ काढावयाचें.

(१ बु॰ १० व्या सि॰ प्र॰) अब रेषेचे ड स्थळीं दोन समान भाग कर, तसेंच अक रेषेचे ई स्थळीं दोन समान भाग कर, आणि (१ बु॰ ११ व्या सि॰ प्र॰) ड आणि ई ह्या दोन बिंदूंतून अ-



ब आणि अक ह्या दोन बाजूंवर अनुक्रमें डफ आणि ईफ रेषा लंब काढ. डफ आणि ईफ लंब वाढविले असतां मिळतील, मिळणार नाहींत, असें मानल्यास ते समांतर होऊं लागतील, आणि ते समांतर झाले म्हणजे, ते ज्या रेषांवर लंब आहेत त्या अब आणि अक रेषाही समांतर होऊं लागती-
ल, पण त्या रेषा अ स्थळीं मिळतात, ह्या करितां

B4

तील, ते फ बिंदूत मिळतात असें मानू. अ, फ सांध, आणि फ बिंदु ब क रेषेंत नसल्यास ब, फ आणि क, फ सांध. अ ड फ आणि ब ड फ ह्या दोन त्रिकोणांत अ ड बाजू ब ड बाजू बरोबर आहे, व ड फ बाजू दोन्ही त्रिकोणांत साधारण आहे, आणि ड बिंदूजवळील कोन काटकोन आहेत, ह्याकरितां (१ बु० ४ थ्या सि० प्र०) अ फ बाजू ब फ बाजू बरोबर आहे, आणि ह्या रीतीनेंच सिद्ध होतें, कीं क फ बाजू अ फ बाजू बरोबर आहे, ह्या करितां अ फ, ब फ आणि क फ ह्या तीन रेषा परस्पर बरोबर आहेत; फ मध्य बिंदु धरून ह्या तीन रेषांपैकीं कोणत्याही एका रेषेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें दुसऱ्या दोन रेषांच्या टोंकांतून जाईल, आणि अ ब क त्रिकोणा सभोंवती संलग्न होईल.

कु० ही गोष्ट उघड आहे, कीं त्रिकोणाच्या सभोंवतालच्या संलग्न वर्तुळाचा मध्य त्रिकोणांत पडला असतां त्याचे तीन्ही कोन लघुकोन असतात, कारण प्रत्येक कोन अर्धवर्तुळापेक्षां मोठ्या खं-

जूंत असल्यास त्या बाजू समोरील कोन काटकोन असतो, कारण तो कोन अर्धवर्तुळांत पडतो, वर्तुळाचा मध्यत्रिकोणाच्या बाहेर पडला असतां, ज्या बाजूच्या बाहेरील अंगास तो मध्य असतो, त्या बाजू समोरील कोन विशाळ असतो, कारण तो कोन अर्धवर्तुलापेक्षां लहान खंडांत असतो, ह्याकरितां लघुकोणत्रिकोण असल्यास सभोंवताल-च्या वर्तुळाचा मध्यबिंदु त्रिकोणांत पडेल, काट-कोन त्रिकोण असल्यास मध्यबिंदु कर्णरेषेंत पडे-ल, आणि विशाळकोण त्रिकोण असल्यास, मध्य-बिंदु विशाळकोना समोरच्या बाजूच्या पलीकडील अंगास पडेल.

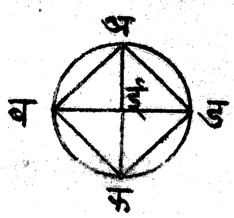
६ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत संलग्न चौरस काढावयाचें.

अ ब क ड एक वर्तुळ आहे, त्यास त्याचे आंत संलग्न चौरस काढावयाचें.

अ क आणि ब ड हे दोन्ही व्यास परस्परां वर लंब होतील असे काढ, आणि अ ब, ब क,

णि अ ई ड ह्या दोन त्रि-
कोणांत ई ब बाजू ईड
बाजू बरोबर आहे, कारण
ई मध्य आहे, ई अ



बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे, व अ ई-
ब आणि अ ई ड हे दोन्ही कोन काटकोन आहे-
त, ह्याकरितां (१ बु० ४ थ्या सि० प्र०) अ ब बाजू अ-
ड बाजूबरोबर आहे; ह्या रीतीनेंच सिद्ध होतें, कीं ब-
क बाजू अ ब बाजूबरोबर आहे, व क ड बाजू अ ड बा-
जूबरोबर आहे, ह्याकरितां अ ब क ड चतुष्कोणाकृति
समभुज चौकोन आहे. ब ड व्यास आहे, ह्या-
करितां ब अ ड अर्धवर्तुळ आहे, म्हणून (२
बु० ३१ व्या सि० प्र०) ब अ ड कोन काटको-
न आहे; अ ब क, ब क ड आणि क ड अ
हे सर्व कोन अर्धवर्तुळांत आहेत, ह्याकरितां
तेही काटकोन आहेत, ह्याकरितां अ ब क ड
चौकोनाचे चारही कोन काटकोन आहेत, आ-
णि पूर्वी सिद्ध केलें आहे, कीं अ ब क ड चौ-
कोन समभुज आहे, ह्यास्तव अ ब क ड

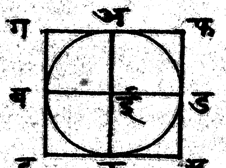
चौरस आहे, व तें अबकड ह्या वर्तुळांत सं-लग्न काढलें असे.

७ सिद्धांत.कृत्य.

वर्तुळा सभोंवती संलग्न चौरस काढाव-याचें.

अबकड एक वर्तुळ आहे, त्यास त्याचे सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अक आणि बड हे दोन व्यास असे काढ, कीं ते परस्परां-वर लंब होतील. (२ बु० १७ व्या सि० प्र०) अ, ब, क आणि ड ह्या



चार बिंदूंतून अनुक्रमें फग, गह, हस आ-णि सफ अबकड वर्तुळास स्पर्शरेषा का-ढ. फग रेघ अबकड वर्तुळास अ स्थळीं स्पर्श करिते, आणि ई मध्यांतून ईअ रेघ अ स्पर्शबिंदूपर्यंत केली आहे, ह्याकरितां (३ बु० १८ व्या सि० प्र०) अ बिंदूजवळचे कोन काटकोन आहेत, ह्याप्रमाणेंच ब, क आणि ड ह्या सर्व

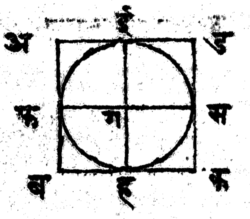
कोन काटकोन आहे, आणि ग ब ड कोन ही काट-
कोन आहे, ह्याकरितां (१ बु० २८ व्या सि० प्र०) ग-
ह रेघ अक शीं समांतर आहे, आणि ह्याप्रमा-
णेंच फस रेघ अक शीं समांतर आहे, व ह्या
प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं गफ आणि हस ह्या
दोन रेघांपैकीं प्रत्येक रेघ बड शीं समांतर आ-
हे. आतां ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं गस, गक, अ-
स, फब आणि बस ह्या सर्व चतुष्कोणाकृति स-
मांतरभुज आहेत, आणि ह्याकरितां (१ बु० ३४ व्या सि० प्र०)
गफ रेघ हस रेघेबरोबर आहे, व गह रेघ फस रेघे
बरोबर आहे. अक रेघ गह आणि फस ह्या दोन रेघांपैकीं
प्रत्येकीशीं बरोबर आहे, तसेंच बड रेघ गफ
आणि हस ह्या दोन रेघांपैकीं प्रत्येकीशीं बरोबर
आहे, पण अक रेघ बड बरोबर आहे, ह्या-
करितां गफ, हस, गह आणि फस ह्या चा-
रही रेघा परस्परबरोबर आहेत, म्हणून गहस-
फ चौकोन समभुज आहे. अगबड समांतर
भुज चौकोन आहे, आणि अडब कोन काटकोन
आहे, ह्याकरितां अडब समोरील जो कोन अ-

गब तीही काटकोन आहे, व ह्यारीतीनेंच सिद्ध होतें, कीं ह, स आणि फ हे कोन काटकोन आहेत, ह्याकरितां गहसफ चौकोन काटकोन चौकोन आहे; पूर्वीं सिद्ध केलें आहे, कीं गहसफ चौकोन समभुज आहे, ह्याकरितां गहसफ चौकोन चौरस आहे, व तें अबकड वर्तुळासभोंवतीं संलग्न काढलें असे.

८ सिद्धांत. कृत्य.

चौरसामध्यें संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अबकड एक चौरस आहे, त्यांत संलग्न वर्तुळ काढावयाचें. (१ बु० १० व्या सि० प्र०) अड आणि अब ह्या दोन बाजूंचे ई आणि फ ह्या स्थळीं अनुक्रमें दोन दोन समान भाग कर, आणि (१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) ई बिंदूंतून ईह रेघ अबशीं किंवा डकशीं समांतर काढ, व फ बिंदूंतून फस रेघ अडशीं किंवा बकशीं समांतर काढ, तेव्हां अ-



स, सब, अह, ड ह, अग, गक, बग, आणि गड ह्या सर्व आकृति समांतरभुजचौकोन आहेत, आणि ह्या करितां (१ बु० ३४ व्या सि० प्र०) ह्या समांतरभुजचौकोनांच्या समोरासमोरच्या बाजू परस्परबरोबर आहेत, अड आणि अब ह्या बाजू परस्परबरोबर आहेत, आणि त्यांचे ई आणि फ ह्या स्थळीं दोन दोन समानभाग केले आहेत, ह्या-करितां अई आणि अफ परस्परबरोबर आहेत, आणि ह्या करितां त्यांच्या बरोबरीच्या ज्या बाजू फग आणि ईग ह्याही परस्परबरोबर आहेत. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं गस बाजू ईग बाजूबरोबर आहे, व गह बाजू फग बाजूबरोबर आहे, ह्याकरितां गई, गफ, गह, आणि गस ह्या सर्व रेषा परस्परबरोबर आहेत, म्हणून ग मध्य धरून ह्या चार रेषांपैकीं कोणत्या तरी एका रेषेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें बाकीच्या तीन रेषांच्या शेवटांतून जाईल. (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) फ, ई, स आणि ह ह्या बिंदूंजवळचे सर्वकोन काटकोन आहेत, ह्यास्तव अब, अड, डक, आणि कब ह्या रेषा अनुक्रमें गफ, गई, गस आणि गह ह्या रेषांवर लंब आहेत, पण गफ,

गई इ रेघा फ ई स ह वर्तुळाच्या त्रिज्या आहेत, आणि त्रिज्यांच्या टोंकांवर ज्या रेघा लंब असतात, त्या (३ बु० १६ व्या सि० प्र०) वर्तुळास स्पर्शीक-रितात, ह्याकरितां फ ई स ह वर्तुळास अ ब-क ड चौरसाच्या अ ब, अ ड, ड क आणि क ब ह्या बाजू स्पर्शीकरितात, तेव्हां अ ब क-ड चौरसांत फ ई स ह वर्तुळ संलग्न निघालें, हें सिद्ध.

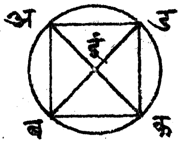
९ सिद्धांत. कृत्य.

चौरसा सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अ ब क ड एक चौरस आहे, त्या सभोंवतीं संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अ, क आणि ब, ड सांध. अ क आणि ब ड ह्या कर्ण रेघा परस्परांस ई स्थळीं छेदितात, अ ब ड आणि अ ड क ह्या दोन त्रिकोणांत अ ब बाजू क ड बाजूबरोबर आहे, अ ड बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, व ब अ ड अंतरकोन अ ड क अंतरकोनाबरोबर आहे ह्याक-रितां (१ बु० ४ थ्या सि० प्र०) ब ड कर्णरेघा

अक कर्णरेषेबरोबर आहे, व (२ बु० ब सि० कु० प्र०) समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णरेषा परस्परांचे दोन दोन समान भाग करितात, ह्याकरितां



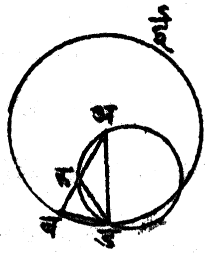
ई अ, ई क, ई ड आणि ई ब ह्या सर्व रेषा परस्परबरोबर आहेत. ई मध्य कल्पून ई अ, ई क, ई ड आणि ई ब ह्या रेषांपैकीं कोणत्याही रेषेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें बाकीच्या तीन रेषांच्या शेवटांतून जाईल, तेव्हां अ ब क ड चौरसा सभोंवती संलग्न वर्तुळ निघालें हें उघड आहे.

१० सिद्धांत. कृत्य.

ज्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोन शिरकोनाच्या दुप्पट होईल असा एक समद्विभुजत्रिकोण काढावयाचा.

अ ब एक रेषा घे, आणि (२ बु० ११ व्या सि० प्र०) तिला क स्थळीं अशी छेद, कीं अ ब × ब क काटकोन चौकोन अ क च्या वर्गा

बरोबर होईल. अ मध्यबिंदु धरून अ ब त्रि-ज्येनें ब ई ड वर्तुळ काढ, आणि त्या वर्तुळांत अ क रेषे एवढी ब ड ज्या (४ बु० १ल्या सि० प्र०) काढ. अ, ड आ-



णि क, ड सांध, आणि (४ बु० ५ व्या सि० प्र०) अ-क ड त्रिकोणा सभोंवती अ क ड संलग्न वर्तुळ काढ.

अब·बक काटकोनचौकोन अक च्या वर्गाबरोबर आहे, आणि अक, बड बरोबर आहे, ह्याकरितां अ-ब·बक काटकोनचौकोन बड वर्गाबरोबर आहे; अक-ड वर्तुळाबाहेरील ब बिंदूपासून ब अ आणि ब ड अ-शा दोन रेषा काढल्या आहेत, त्यांपैकीं ब अ रेष अ क ड वर्तुळास क स्थळीं छेदिते, आणि ब ड रेष त्यास ड स्थळीं मिळते. ब अ छेदनरेषा आ-णि बाहेरील तिचा भाग ब क ह्यांचा काटकोनचौ-कोन वर्तुळास मिळणाऱ्या ब ड रेषेच्या वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरितां (३ बु० ३७ व्या सि० प्र०) अ क ड वर्तुळास ब ड रेष ड स्थळीं स्पर्श करिते. ब ड

स्पर्शरेषा आहे, आणि ड स्पर्शबिंदूपासून ड क
ज्या काढली आहे, ह्याकरितां (३ बु० ३२ व्या सि०
प्र०) ब ड क कोन ड अ क व्युत्क्रमखंडांतील
ड अ क कोनाबरोबर आहे, ह्या दोन्ही कोनांत क-
ड अ कोन मिळीव, म्हणजे सगळा ब ड अ
कोन क ड अ आणि ड अ क ह्या दोन कोनां-
च्या बेरजे बरोबर होईल. अ क ड त्रिकोणाचा
बाहेरील ब क ड कोन (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०)
क ड अ आणि ड अ क ह्या दोन कोनांच्या बेर-
जेबरोबर आहे, म्हणून ब ड अ कोन ब क ड
कोनाबरोबर आहे. अ ब आणि अ ड ह्या दो-
न्ही रेघा त्रिज्या आहेत, ह्याकरितां त्या परस्परबरो-
बर आहेत, म्हणून (१ बु० ५ व्या सि० प्र०) अ-
ब ड कोन अ ड ब कोनाबरोबर आहे, म्हणून ब-
क ड कोन क ब ड कोनाबरोबर आहे, म्हणून
(१ बु० ६ व्या सि० प्र०) ब ड बाजू ड क बाजू
बरोबर आहे. ब ड रेघ अ क रेघेबरोबर केली
आहे, ह्याकरितां ड क अ क बरोबर आहे, म्ह-
णून (१ बु० ५ व्या सि० प्र०) क अ ड कोन
अ ड क कोनाबरोबर आहे. क अ ड आणि

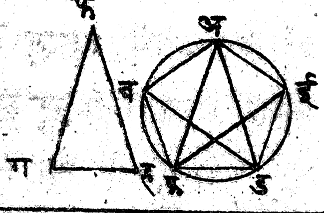
अडक ह्या दोन कोनांची बेरीज कअड कोनाच्या दुप्पट आहे, असें म्हणण्यास चिंता नाहीं. कअड आणि कडअ ह्या दोन कोनांची बेरीज बडअ कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां बडअ कोन कअड कोनाच्या दुप्पट आहे. अबड कोन बडअ कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां बअड शिरकोनाच्या दुप्पट अबड समद्विभुज त्रिकोणाच्या पाया कडील प्रत्येक कोन आहे, हें सिद्ध.

११ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत संलग्न समभुज समकोण पंचकोण[+] काढावयाचें.

अबकडई एक वर्तुळ आहे, त्यामध्यें संलग्नसमभुज समकोण पंचकोण काढावयाचें.

(४ बु॰ १० व्या सि॰ प्र॰) फगह एक समद्विभुज त्रिकोण काढ, असा कीं त्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोन त्याच्या



+ पंच म्हणजे पांच.

त्रिरकोनाच्या दुप्पट होईल. (४ बु॰ २ च्या सि॰ प्र॰) अबकडई वर्तुळांत फगह त्रिकोणाशीं समकोण असा एक अकड त्रिकोण कर, तो असा, कीं अकड त्रिकोणाचा कअड त्रिरकोन गफह त्रिकोणाच्या फ त्रिरकोनाबरोबर होईल, व अकड आणि अडक पायाकडील कोन ग आणि ह पायाकडील कोनांबरोबर अनुक्रमें होतील. तेव्हां अकड आणि अडक ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोन कअड कोनाच्या दुप्पट आहे; (१ बु॰ ९ च्या सि॰ प्र॰) अकड आणि अडक ह्या दोन कोनांचे कई आणि डब ह्या दोन रेषांनीं अनुक्रमें दोन दोन समान भाग कर, आणि अ,ब अ,ई ई,ड आणि ब,क सांध.

अकड आणि अडक ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोन कअड कोनाच्या दुप्पट आहे, व त्यांचे कई आणि डब ह्या दोन रेषांनीं दोन दोन समान भाग केले आहेत, ह्याकरितां अकई, ईकड, कडब, बडअ, आणि कअड हे सर्व कोन परस्पर बरोबर आहेत. स-

मानकोन समान कौंसांवर असतात, असें ३ बुकाच्या २६ सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अब, बक, कड, डई आणि ईअ हे सर्व कौंस परस्परबरोबर आहेत. समान कौंसांच्या ज्या समान असतात, असें ३ बु० २९ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, म्हणून अब, बक, कड, डई आणि ईअ ह्या ज्या सर्व परस्परबरोबर आहेत, ह्यास्तव अबकडई आकृति समभुज पंचकोण आहे. अब कौंस डई कौंसाबरोबर आहे, दोन्ही कौंसांत बकड कौंस मिळीव, तेव्हां अबकड कौंस ईडकब कौंसाबरोबर होईल. अबकड कौंसावरील अईड कोन आणि ईडकब कौंसावरील बअई कोन हे (३ बु० २७ व्या सि० प्र०) परस्परबरोबर आहेत. ह्याप्रमाणेंच अबक, बकड आणि कडई हे कोन बअई किंवा अईड कोनाबरोबर आहेत, असें सिद्ध होतें, म्हणून अबकडई पंचकोणाकृति समकोण आहे; पूर्वी ती आकृति समभुज आहे असें सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अब-

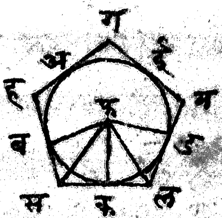
णि तें अबकडई वर्तुळांत काढलें असे.

१२ सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळा सभोंवती संलग्न समकोण पंचकोण काढावयाचें.

अबकडई एक वर्तुळ आहे, त्यासभोंवती संलग्न समभुज समकोण पंचकोण काढावयाचें.

अबकडई वर्तुळांत मागील सिद्धांताप्रमाणें काढलेल्या समभुज समकोण पंचकोणाकृतीचे कोनांचीं टोकें



अ, ब, क, ड, ई बिंदु आहेत, असें मानूं. तेव्हां (४ बु० ११ व्या सि० प्र०) अब, बक, कड, डई आणि ईअ हे सर्व कौंस परस्पर बरोबर आहेत. (३ बु० १७ व्या सि० प्र०) अ, ब, क, ड, ई ह्या बिंदूंतून अनुक्रमें गह, हस, सल, लम आणि मग स्पर्शरेषा काढ. वर्तुळाचा

फ मध्यबिंदु काढ, आणि फ,ब फ,स फ,क फ,ल आणि फ,ड सांध. सल रेघ अबकडई वर्तुळास क स्थळीं स्पर्श करिते, आणि फ मध्यबिंदूपासून क स्पर्शस्थलापर्यंत फक रेघ काढिली आहे, ह्याकरितां (३ बु० १८ व्या सि० प्र०) फक रेघ सल वर लंब आहे, ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं फब आणि फड ह्या रेघा हस आणि लम ह्या स्पर्शरेषांवर अनुक्रमें लंब आहेत. फकस कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां (१ बु० ४७ व्या सि० प्र०) फस², फक² आणि सक² ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे, ब कोन काटकोन आहे, ह्याकरितां फस², फब² आणि बस² ह्यांचे बेरजेबरोबर आहे, म्हणून फक² आणि सक² हे फब² आणि बस² ह्यांबरोबर आहेत. फक², फब² बरोबर आहे, कारण फक आणि फब ह्या रेघा त्रिज्या आहेत, तेव्हां सक², बस² बरोबर आहे, म्हणून सक बस बरोबर आहे. बफस आणि कफस ह्या दोन त्रिकोणांत फब बाजू फक बाजू बरोबर आहे, बस, सक बरोबर आहे, आणि फस रेघ दोन्ही त्रिकोणांस

साधारण आहे, ह्याकरितां (१ बु० ८ व्या सि० प्र०) ब फ स कोन क फ स कोनाबरोबर आहे, व ब स फ कोन क स फ कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याकरितां ब फ क कोन क फ स कोनाच्या दुप्पट आहे, व ब स क कोन फ स क कोनाच्या दुप्पट आहे, हें स्पष्टच आहे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं क फ ड कोन क फ ल कोनाच्या दुप्पट आहे, व क ल ड कोन क ल फ कोनाच्या दुप्पट आहे. ब क कोंस क ड कोंसाबरोबर आहे, ह्याकरितां (३ बु० २७ व्या सि० प्र०) ब फ क कोन क फ ड कोनाबरोबर आहे. ब फ क कोन स फ क कोनाच्या दुप्पट आहे, व क फ ड कोन क फ ल कोनाच्या दुप्पट आहे, ह्याकरितां स फ क कोन क फ ल कोनाबरोबर आहे. फ क स आणि फ क ल ह्या दोन त्रिकोणांत स फ क कोन ल फ क कोनाबरोबर आहे. फ क स काटकोन फ क ल काटकोनाबरोबर आहे, आणि फ क बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्याकरितां (१ बु० २६ व्या सि० प्र०) फ स बाजू फ ल बाजूबरोबर आहे, फ स क

कोन फलक कोनाबरोबर आहे, आणि सक बाजू लक बाजूबरोबर आहे. सक, लक बरोबर आहे, ह्याकरितां सल, सकच्या दुप्पट आहे. सल सकच्या दुप्पट आहे, हें ज्या रीतीनें सिद्ध झालें त्यारीतीनेंच हस बसच्या दुप्पट आहे, हें सिद्ध होतें. बस, सक बरोबर आहे, असें पूर्वी सिद्ध केलें आहे, व हस बसचे दुप्पट आहे, व सल, सकचे दुप्पट आहे, ह्याकरितां हस सल बरोबर आहे, ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं हग, गम, आणि मल ह्या बाजू प्रत्येक सल बरोबर आहेत. ह्याकरितां हसलमग पंचकोण समभुज आहे. फसक कोन फलक कोनाबरोबर आहे, आणि बसक कोन फसक कोनाच्या दुप्पट आहे, व डलक कोन फलक कोनाच्या दुप्पट आहे, ह्याकरितां बसक कोन डलक कोनाबरोबर आहे, गहस, मगह आणि लमग हे कोन प्रत्येक हसल कोनाबरोबर आहेत, हें सिद्ध वरल्याप्रमाणेंच होतें, ह्याकरितां हसलमग पंचकोण समकोण आहे, ह्यास्तव अबकडई वर्तु-

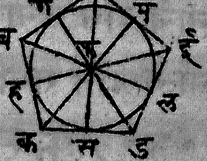
ळा सभोंवती संलग्न समभुज समकोण हसल- मग पंचकोण काढलें असे.

१३ सिद्धांत. कृत्य.

समभुज समकोण पंचकोणांत संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अबकडई एक समभुज समकोण पंचकोण आहे, त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढा- वयाचें.

(१ बु० ९ व्या सि० त्र०) कफ रेघेनें बकड कोनाचे दोन समान भाग कर, व डफ रेघेनें कडई कोनाचे दोन समान भाग कर, कफ आणि डफ ह्या दोन रेघा



फ बिंदूंत मिळतात, त्यापासून फब, फअ आणि फई रेघा काढ. बकफ आणि कडफ ह्या दोन त्रिकोणांत बक बाजू कड बाजू बरोबर आहे. कफ बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, आणि बकफ अंतरकोन डकफ अंतरकोना

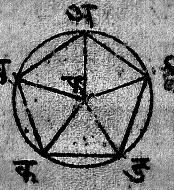
बरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बु० ४ थ्या सि० प्र०) बफ बाजू डफ बाजू बरोबर आहे, व कबफ कोन कडफ कोनाबरोबर आहे. कडई कोन कबअ कोनाबरोबर आहे, व कडफ कोन कबफ कोनाबरोबर आहे, पण कडई कोन कडफ कोनाच्या दुप्पट आहे, ह्याकरितां कबअ कोन कबफ कोनाच्या दुप्पट आहे, म्हणजे कबफ कोन फबअ कोनाबरोबर आहे, म्हणून कबअ कोनाचे बफ रेघ दोन समान भाग करिते, असें म्हणण्यास चिंता नाहीं. ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं अफ रेघ बअई कोनाचे दोन समान भाग करिते, व ईफ रेघ अईड कोनाचे दोन समान भाग करिते. (१ बु० १२ व्या सि० प्र०) फस, फल, फम, फग आणि फह ह्या रेघा कड, डई, ईअ, अब, आणि बक ह्या रेघांवर अनुक्रमें लंब काढ. फहक आणि फसक ह्या दोन त्रिकोणांत फकह कोन फकस कोनाबरोबर आहे, फहक काटकोन फसक काटकोनाबरोबर आहे, आणि फहक आणि फसक हे जे समान कोन ह्यांच्या समोरची कफ बाजू दोन्ही त्रिको-

णांस साधारण आहे, ह्या करितां (१ बु॰ २६ व्या सि॰ प्र॰) फह लंब फस लंबाबरोबर आहे, आणि ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं फग, फम आणि फल ह्या लंबांपैकीं प्रत्येक लंब फस लंबाबरोबर आहे, ह्या करितां फग, फह, फस, फल आणि फम हे सर्व लंब परस्परबरोबर आहेत. फ मध्य धरून ह्या पांच लंबांपैकीं कोणत्या तरी एका लंबानें वर्तुळ काढलें असतां, तें बाकीच्या चार लंबांच्या शेवटांतून जाईल, व अब, बक, कड, डई आणि ईअ ह्या सर्व रेघांस स्पर्श करील, कारण ग, ह, स, ल आणि म ह्या बिंदूंजवळील सर्व कोन काटकोन आहेत, आणि त्रिज्येच्या टोंकावरची रेघ लंब असते, ती वर्तुळास स्पर्श करिते, म्हणून अब, बक, कड, डई आणि ईअ ह्या सर्व रेघा वर्तुळास स्पर्श करितात, ह्या करितां अबकडई समभुज समकोण पंचकोणांत गहसलम वर्तुळ काढलें असे.

१४ सिद्धांत. कृत्य.

समभुज समकोण पंचकोणा सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

अबकडई एक समभुज समकोण पंचकोण आहे, त्या सभोंवती संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.



(१ बु० ९ व्या सि० प्र०) कफ रेषेनें बकड कोनाचे दोन समान भाग कर, व डफ रेषेनें कडई कोनाचे दोन समान भाग कर, आणि कफ आणि डफ ह्या दोन रेषा फ स्थळीं मिळतात, त्यास फ बिंदूपासून ब, अ आणि ई बिंदूपर्यंत फब, फअ आणि फई रेषा काढ. मागील सिद्धांतात सिद्ध केलें आहे त्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं कबअ बअई आणि अईड ह्या कोनांचे अनुक्रमें बफ अफ आणि ईफ ह्या रेषा दोन दोन समान भाग करितात. बकड कोन कडई

कोनाबरोबर आहे, आणि फकड कोन बकड कोनाचें अर्ध आहे, व फडक कोन कडई कोनाचें अर्ध आहे, ह्याकरितां फकड कोन फडक कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बु० ६ व्या सि० प्र०) कफ बाजू डफ बाजूबरोबर आहे, आणि ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं बफ, अफ आणि ईफ ह्या रेघा प्रत्येक डफ बाजूबरोबर आहेत. फ मध्यकल्पून ह्या पांच रेघांपैकीं एका रेघेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें बाकीच्या रेघांच्या शेवटांतून जाईल, त्यास अबकडई समभुज समकोण पंचकोणासभोंवती संलग्न वर्तुळ काढलें असे.

१५ सिद्धांत-कृत्य.

वर्तुळांत समभुज समकोण षट्+कोण काढावयाचें.

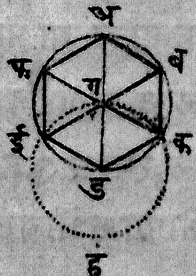
अबकडईफ एक वर्तुळ आहे, त्यांत समभुज समकोण षट्कोण काढावयाचें.

अबकडईफ वर्तुळाचा ग मध्य काढ,

\+ षट् म्हणजे साहा.

आणि अगड व्यास काढ, ड मध्य धरून डग त्रिज्येनें ईगकह वर्तुळ काढ, ई,ग आणि क,ग सांध. ईग आणि कग रेषा फ आणि ब बिंदूंपर्यंत वाढीव, आणि अ,ब ब,क क, ड ड,ई ई,फ आणि फ,अ सांध.

अबकडईफ वर्तुळाचा ग मध्य आहे, ह्याकरितां गई, गड बरोबर आहे, व गकहई वर्तुळाचा मध्य ड आहे, ह्याकरितां डई डग बरोबर आहे, म्हणून गई, डई बरोबर आहे; आणि ह्याकरितां गईड त्रिकोण समभुज आहे. (२ बु० ५ व्या सि० कु० प्र०) गईड त्रिकोणाचे गईड, ईडग आणि डगई हे तीन्ही कोन परस्पर बरोबर आहेत. त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बरोबर असते, असें १ बु० ३२ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, म्हणून ईगड कोन साठ अंशाचा आहे, व ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं डगक कोन साठ अंशांचा आहे. बई रेषेस कग रेषा ग स्थळीं मिळते, ह्याकरितां (१ बु० १२ व्या सि० प्र०) ईगक आणि



कगब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर आहेत, पण ईगक कोन १२० अंशांचा आहे, ह्याकरितां अर्थातच कगब कोन ६० अंशांचा आहे, म्हणून ईगड, डगक आणि कगब हे तीन कोन परस्पर बरोबर आहेत. हे, ह्यां समोरील जे कोन बगअ, अगफ आणि फगई ह्यांशीं (१ बु० १५ व्या सि० प्र०) परस्परबरोबर आहेत, म्हणून ईगड, डगक, कगब, बगअ, अगफ आणि फगई हे साहा कोन परस्परबरोबर आहेत, परंतु समकोन समकौंसांवर असतात असें ३ बु० २६ व्या सिद्धांतांत सांगितलें आहे, ह्याकरितां अब, बक, कड, डई, ईफ आणि फअ हे साहा कौंस परस्परबरोबर आहेत. समकौंसांच्या ज्या सम असतात, असें ३ ऱ्या बुकाच्या २९ व्या सिद्धांतांत आहे, ह्याकरितां अब, बक, कड, डई, ईफ आणि फअ ह्या साहा ज्या परस्परबरोबर आहेत, म्हणून अबकडईफ षट्कोन समभुज आहे. अफ कौंस ईड कौंसाबरोबर आहे,

आणि ह्या दोन कोंसांत अ ब क ड कोंस मिळवि-
ला असतां फ अ ब क ड सगळा कोंस ई ड-
क ब अ सगळ्या कोंसाबरोबर होईल, म्हणून
अ फ ई कोन फ ई ड कोनाबरोबर आहे, आणि
ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं अ ब क ड ई फ ह्या ष-
ट्कोणाचे इतर कोन फ ई ड कोनाबरोबर आहेत,
म्हणून हें षट्कोण समकोण आहे, आणि हें समभु-
ज आहे असें सिद्ध केलें आहेच, ह्याकरितां अ ब क-
ड ई फ वर्तुळांत समभुज समकोण षट्कोण का-
ढलें असे.

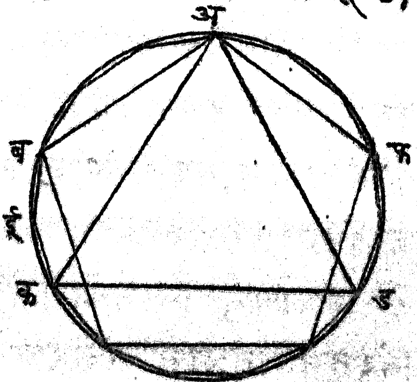
कु॰ ह्यावरून स्पष्ट आहे, कीं वर्तुळांतील षट्को-
नाची बाजू त्रिज्येबरोबर असते. अ, ब, क, ड,
ई, फ ह्या बिंदूंतून वर्तुळास स्पर्शरेषा केल्या अस-
तां त्यांच्या योगानें वर्तुळासभोंवती संलग्न समभुज
समकोण षट्कोण होईल, आणि त्याविषयीं सि-
द्धता समभुज समकोन पंचकोणाप्रमाणेंच होय.
समभुज समकोण षट्कोणासभोंवती व त्याचे
आंत संलग्न वर्तुळ समभुजसमकोणपंचकोणासभोंवती
व त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढण्याविषयीं जी
रीत योजिली आहे, ह्यारीतीनेंच होते.

१६ सिद्धांत कृत्य.

वर्तुळांत समभुज समकोण पंचदशकोण[+] काढावयाचें.

अबकड एकवर्तुळ आहे, त्यांत सम-भुज समकोण पंचदश कोण काढावयाचें.

अबकड वर्तुळांत (४ बु० २ र्‍या सि० प्र०) काढलेल्या समभुज त्रिकोणाची बाजू अक आहे, व (४ बु० ११ व्या सि० प्र०) काढलेल्या समभुज समकोण पंचकोणाची बाजू अब आहे, असें



मानूं. समभुज पंचदशकोण वर्तुळांत निघालें असतां, त्याच्या योगानें वर्तुळाचे पंधरा भाग समान होतील. आतां वर्तुळाचा तृतीयांश जो अबक कोंस ह्यांत समभुज पंचदशकोणाचे पांच भाग आहेत,

---

[+] पंचदश म्हणजे पंधरा.

व वर्तुळाचा पंचमांश जो अब कौंस ह्यांत तीन भाग आहेत, असें म्हणण्यास चिंता नाहीं; तेव्हां अक आणि अब ह्या दोन कौंसांची वजाबाकी जो बक कौंस त्यांत पंचदश कोणाचे दोन भाग आहेत, हें स्पष्टच आहे. (३ बु० २० व्या सि० प्र०) बक कौंसाचे ई स्थळीं दोन समान भाग कर. बई आणि ईक ह्या दोन कौंसांतील प्रत्येक कौंस वर्तुळाचा पंधरावा भाग आहे. बई आणि ईक ह्या जर दोन रेषा काढल्या आणि जर (४ थ्या बु० १ ल्या सि० प्र०) त्यांशीं समअशा रेषा वर्तुळांत काढीत गेलें, तर समभुज समकोण पंचदशकोण होईल.

समभुज समकोण पंचदश कोणाच्या कोण बिंदूंतून वर्तुळास स्पर्शरेषा केल्या असतां त्यांच्या योगानें वर्तुळा सभोंवती संलग्न समभुज समकोण पंचदश कोण होईल. समभुज समकोण पंचकोणा सभोंवती व त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढण्याची जी रीत सांगीतली आहे, त्यारीतीनेंच समभुज समकोण पंचदशकोणा सभोंवती व त्याचे आंत संलग्न वर्तुळ काढतां येतें.

चवथ्या बुकाचे प्रश्न.

१ विवक्षित बिंदु वर्तुळाचे बाहेर असो, किंवा त्याचे आंत असो, त्यांतून जाणारी व विवक्षित रेषेशीं समान होणारी अशी एक ज्या काढावयाची.

२ एका विवक्षित रेषेशीं समान व दुसऱ्या विवक्षित रेषेशीं समांतर किंवा तीस मिळाली असतां विवक्षित कोना एवढा तिशीं कोन करणारी अशी एक ज्या वर्तुळांत काढावयाची.

३ वर्तुळास अशी स्पर्शरेषा काढावयाची आहे, कीं ती विवक्षित रेषेशीं समांतर होईल.

४ वर्तुळास अशी स्पर्शरेषा काढावयाची आहे, कीं ती विवक्षित रेषेस मिळाली असतां त्यांच्यामध्यें जो कोन होईल तो विवक्षित कोना एवढा होईल.

५ विवक्षित रेषेंत असा एक बिंदु काढावयाचा आहे, कीं तो त्या रेषेंतील विवक्षित बिंदूपासून व दुसऱ्या विवक्षित रेषेपासून सारखे अंतरावर होईल.

६ विवक्षित रेषेस विवक्षित बिंदूंत स्पर्शकर-

णारें व दुसऱ्या एका विवक्षित बिंदूतून जाणारें असें वर्तुळ काढावयाचें.

७ अशी एक रेषा काढावयाची आहे, कीं ती दोन वर्तुळांस स्पर्शरेषा होईल.

८ विवक्षितरेषेंत असा एक बिंदु काढावयाचा आहे, कीं तो विवक्षित बिंदूपासून व दुसऱ्या एका विवक्षित रेषेपासून सारख्या अंतरावर होईल.

९ दोन विवक्षित बिंदूतून जाणारें व विवक्षित रेषेस स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

१० विवक्षित रेषेस विवक्षित स्थानीं स्पर्श करणारें व विवक्षित वर्तुळास स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

११ वर्तुळाच्याआंतील संलग्न अष्टकोणाचें क्षेत्रफळ त्याच वर्तुळाचे बाहेरील संलग्न चौरसाची एक बाजू आणि आंतील संलग्न चौरसाची एक बाजू यांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर असतें.

१२ विवक्षित वर्तुळपादांत संलग्न वर्तुळ काढावयाचें.

१३ विवक्षित बिंदूतून जाणारें व विवक्षित वर्तुळास विवक्षितस्थळीं छेदणारें असें एक वर्तु-

ळ काढावयाचें.

१४ वर्तुळासभोंवती संलग्न चौकोन काढलें असतां त्याच्या समोरासमोरच्या बाजूंची बेरीज त्याच्या सर्वबाजूंच्या परिमिताच्या अर्धाबरोबर असते.

१५ बहुकोणाकृतीच्या सर्वबाजू दोन्ही टोंकाकडे वाढविल्या असतां, त्या मिळून जे कोन होतात, त्यांमध्यें आठ काटकोन मिळविले तर सर्वकोन बहुकोणाकृतीच्या बाजूंच्या संख्येचे दुप्पट काटकोनांबरोबर असतात.

१६ काटकोनचौकोनाच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंवर त्यांचे एकेत्र अंगास त्या बाजू व्यास कल्पून अर्धवर्तुलें काढलीं असतां, त्या अर्धवर्तुळांचे परिघ व काटकोनचौकोनाच्या दुसऱ्या दोन बाजू ह्यांच्या मध्यें जें क्षेत्र सांपडतें तें काटकोन चौकोनाच्या क्षेत्रफळाबरोबर असतें.

१७ विवक्षित बिंदूतून जाणारें व विवक्षित दोन रेषांस स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

१८ विवक्षित वर्तुळास विवक्षित दोनरेषांस

स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

५ बूक.

व्याख्या.

१ महत्व लक्षून दोन सरूप पदांचा जो परस्पर संबंध त्यास गुणोत्तर असें म्हणतात. अ आणि ब ह्या दोन सरूपपदांचा संबंध अ : ब किंवा $\frac{अ}{ब}$ असा लिहितात.

२ गुणोत्तराचे पहिले पदास अग्रसर असें म्हणतात, आणि दुसरे पदास उपाग्रसर असें म्हणतात.

३ ज्या मोठ्या पदामध्यें लहान पद कांहीं वेळ बरोबर जातें त्या मोठ्या पदास त्या लहान पदाचें व्यापक असें म्हणतात, आणि त्या लहान पदास त्या मोठ्या पदाचें व्याप्य असें म्हणतात.

४ ज्या व्यापकांतून पदें सारखे वेळ जातात, त्या व्यापकांस त्या पदांचीं समव्यापकें असें म्हणतात.

५ चार पदें असलीं, आणि पहिलें पद आणि तिसरें पद ह्यांचीं जीं पाहिजेत तीं समव्यापकें घेतलीं, व दुसरें पद आणि चौथें पद ह्यांचीं जीं पाहिजेत तीं समव्यापकें घेतलीं, आणि जर पहिले पदाचें व्यापक दुसरे पदाचे व्यापकापेक्षां मोठें असलें, आणि त्याप्रमाणेंच तिसरे पदाचें व्यापक चौथे पदाचें

व्यापकापेक्षां मोठें असलें, किंवा जर पहिलेपदाचें व्याप-क दुसरेपदाचे व्यापकाबरोबर असलें, आणि त्याप्र-माणेंच तिसरेपदाचें व्यापक चौथेपदाचे व्यापकाबरो-बर असलें, किंवा जर पहिलेपदाचें व्यापक दुसरेपदाचे व्यापकापेक्षां कमी असलें, आणि त्याप्रमाणेंच तिसरेप-दाचें व्यापक चौथेपदाचे व्यापकापेक्षां कमी असलें, तर पहिलेंपद आणि दुसरें पद ह्यांचें गुणोत्तर तिसरेंपद आणि चौथेंपद ह्यांचे गुणोत्तराबरोबर आहे.

६ चारपदांत पहिलेंपद आणि दुसरेंपद ह्यांचें गु-णोत्तर जर तिसरेंपद आणि चौथेंपद ह्यांचे गुणोत्तरा बरोबर असलें, तर तीं चारपदें प्रमाणांत आहेत अ-सें म्हणतात, आणि त्याप्रमाणास चतुः प्रमाण असें म्हणतात.

७ अ, ब, क, ड चारपदें प्रमाणांत असल्यास अस जर ब तर क स ड असें लिहितात, व अ: ब: : क: ड ह्या प्रमाणेंही लिहितात.

१ सिद्धांत.

चारपदें प्रमाणांत असल्यास आद्यंतपदां-चा गुणाकार मध्यपदांचे गुणाकाराबरोबर असतो.

अ : ब : : क : ड असें आहे, त्यास अ ड = ब क हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ असें आहे. ब ड ह्या पदानें दोन्ही पेट्यांचे अंशांस गुणिलें, तर $\frac{\text{अ ब ड}}{\text{ब}} = \frac{\text{क ब ड}}{\text{ड}}$ असें होतें. संक्षेपानें अ ड = क ब हें सिद्ध.

कु॰ ह्यावरून स्पष्ट दिसतें, कीं तीन पदें अखंड प्रमाणांत असल्यास आद्यंत पदांचा गुणाकार मध्य-पदांचे वर्गाबरोबर असतो.

२ सिद्धांत.

दोन पदांचा गुणाकार जर दुसऱ्या दोन पदां-च्या गुणाकाराबरोबर असला, तर तीं चार पदें पर-स्पर प्रमाणांत असतात.

अ आणि ड ह्या पदांचा गुणाकार ब आणि क ह्या पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे, त्यास अ : ब : : क : ड, हें सिद्ध करावयाचें.

अड = बक ह्या समीकरणा-
दोन्ही पेव्यांस बड ह्यानें भागिलें असतां
$= \frac{क}{ड}$ असें होतें, म्हणून अ : ब : : क :
हें सिद्ध.

३ सिद्धांत.

ज्या पदांचे दुसऱ्या एका पदाशीं समान
णोत्तर असतें, तीं पदें समान असतात.

अ आणि ब ह्यांचें गुणोत्तर क शीं स
आहे, ह्या करितां अ, ब बरोबर आहे, हें
करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$ ह्या समीकरणाचे दोन्ही पे
क नें गुणिलें असतां $\frac{अक}{ब} = \frac{बक}{क}$ असें
म्हणून अ = ब हें सिद्ध.

४ सिद्धांत.

जीं गुणोत्तरें दुसऱ्या एका गुणोत्तराशीं स
न असतात, तीं परस्पर समान असतात.

अ : ब : : क्ष : य, आणि क : ड : : क्ष :

रावयाचें. अ : ब : : क्ष : य म्हणजे $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$ आणि क : ड : : क्ष : य म्हणजे $\frac{\text{क}}{\text{ड}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$ म्हणून $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ म्हणजे अ : ब : : क : ड हें उघड आहे.

५ सिद्धांत.

चतुष्प्रमाणांतील पदें परावर्तनानें प्रमाणांत असतात.

अ : ब : : क : ड असें आहे, त्यास अ : क : : ब : ड असें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ ह्या समीकरणांतील दोन्ही पेव्यांस $\frac{\text{ब}}{\text{क}}$ ह्यानें गुणिलें असतां, $\frac{\text{अब}}{\text{बक}} = \frac{\text{बक}}{\text{कड}}$ असें होतें, म्हणून संक्षेपानें $\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ब}}{\text{ड}}$ म्हणजे अ : क : : ब : ड हें सिद्ध.

६ सिद्धांत.

चतुःप्रमाणांतील पदें व्यस्तीकरणानें प्रमाणांत असतात.

अ : ब : : क : ड असें आहे, त्यास

ब : अ : : ड : क असें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ह्या समीकरणांतील दोन्ही पे-ट्यांनीं एकास भागिलें असतां $\frac{१}{\frac{अ}{ब}} = \frac{१}{\frac{क}{ड}}$ असें होतें, म्हणजे $\frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$ म्हणजे ब : अ : : ड : क हें सिद्ध.

७ सिद्धांत.

चतुः प्रमाणांतील पदें मिश्रणानें प्रमाणांत होतात.

अ : ब : : क : ड असें आहे, त्यास अ + ब : ब : : क + ड : ड हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ह्या समीकरणाच्या दोन्ही पेल्यांत एक मिळविला असतां $\frac{अ + ब}{ब} = \frac{क + ड}{ड}$ असें होतें, म्हणजे अ + ब : ब : : क + ड : ड हें सिद्ध.

८ सिद्धांत.

चतुः प्रमाणांतील पदें वजाबाकीनें प्रमाणांत होतात.

अ : ब : : क : ड असें आहे, त्यास

$अ - ब : ब :: क - ड : ड$ हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ ह्या समीकरणाचे दोन्ही पेक्षांतून एक वजा केला असतां $\frac{अ - ब}{ब} = \frac{क - ड}{ड}$ असें होतें, म्हणजे $अ - ब : ब :: क - ड : ड$ हें सिद्ध.

कु॰ हा सिद्धांत व मागील सिद्धांत ह्यांपासून स्पष्ट दिसून येतें, कीं चतुःप्रमाणांतील पहिलें पद आणि दुसरें पद ह्यांच्या बेरजेस जर त्यांची वजाबाकी तर तिसरें पद आणि चौथें पद ह्यांच्या बेरजेस त्यांची वजाबाकी, म्हणजे $अ + ब : अ - ब :: क + ड : क - ड$. मिश्रणानें $\frac{अ + ब}{ब} = \frac{क + ड}{ड}$ वजाबाकीनें $\frac{अ - ब}{ब} = \frac{क - ड}{ड}$ ह्या दोन्ही समीकरणांचा भागाकार घेतल्यानें $\frac{अ + ब}{ब} \times \frac{ब}{अ - ब} = \frac{क + ड}{ड} \times \frac{ड}{क - ड}$ असें होतें, म्हणजे $\frac{अ + ब}{अ - ब} = \frac{क + ड}{क - ड}$ म्हणजे $अ + ब : अ - ब :: क + ड : क - ड$ हें सिद्ध.

९ सिद्धांत.

चतुःप्रमाणांतील पदें व्यस्त वजाबाकीनें प्रमाणांत होतात.

अ : ब : : क : ड असें आहे, त्यास अ : अ − ब : : क : क − ड हें सिद्ध करावयाचें.

परावर्तनानें ब : अ : : ड : क म्हणून $\frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$ ह्या दोन्ही समकरणाचे पेटे एकांतून वजा केले असतां $\frac{अ - ब}{अ} = \frac{क - ड}{क}$ असें होतें, पुनः परावर्तनानें $\frac{अ}{अ - ब} = \frac{क}{क - ड}$ म्हणून अ : अ − ब : : क : क − ड हें सिद्ध.

१० सिद्धांत.

चतुःप्रमाणांतील पदें बेरजेनें प्रमाणांत होतात.

अ : ब : : क : ड असें आहे, त्यास अ : अ + ब : : क : क + ड हें सिद्ध करावयाचें.

परावर्तनानें $\frac{ब}{अ} = \frac{ड}{क}$ ह्या समीकरणाचे दोन्ही पेट्यांत एक मिळविला म्हणजे $\frac{अ + ब}{अ}$

$= \frac{\text{क} + \text{ड}}{\text{क}}$ असें होतें. पुनः परावर्तनानें $\frac{\text{अ}}{\text{अ} + \text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{क} + \text{ड}}$ म्हणून अः अ + बः : कः क + ड हें सिद्ध.

११ सिद्धांत.

ज्यांच्या पदांची संख्या सारखी आहे, अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन ह्याप्रमाणें सर्व पदें सरळ क्रमानें परस्पर प्रमाणांत असलीं तर पहिल्या श्रेणीच्या पहिल्या पदास जर तिचें शेवटचें पद तर दुसऱ्या श्रेणीच्या पहिल्या पदास तिचें शेवटचें पद, असें असतें.

अ, ब, क, ड आणि ई, फ, ग, ह अशा दोन श्रेण्या आहेत, आणि त्यांतील दोन दोन ह्याप्रमाणें सर्वपदें सरळ क्रमानें परस्पर प्रमाणांत आहेत. म्हणजे अः बः : ईः फ; बः कः : फः ग; आणि कः डः : गः ह, त्यास अः डः : ईः ह हें सिद्ध करावयाचें. $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{ई}}{\text{फ}}$, $\frac{\text{ब}}{\text{क}} = \frac{\text{फ}}{\text{ग}}$ आणि $\frac{\text{क}}{\text{ड}} = \frac{\text{ग}}{\text{ह}}$ असें आहे, तेव्हां ह्या समीकरणांचा गुणाकार घेतला असतां $\frac{\text{अबक}}{\text{बकड}} = \frac{\text{ईगफ}}{\text{फगह}}$ असें येतें. संक्षेप दिला असतां

$\frac{अ}{ड} = \frac{ई}{ह}$ असें राहातें, म्हणून अ : ड : : ई : ह हें उघड आहे.

१२ सिद्धांत.

ज्यांच्या पदांची संख्या सारखी आहे, अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन ह्याप्रमाणें सर्व पदें वक्रक्रमानें प्रमाणांत असली तर पहिल्या श्रेणीच्या पहिल्या पदास जर तिचें शेवटचें पद तर दुसऱ्या श्रेणीच्या पहिले पदास तिचें शेवटचें पद, असें असतें.

अ, ब, क, ड आणि ई, फ, ग, ह अशा दोन श्रेण्या आहेत, आणि त्यांतील दोन दोन ह्या प्रमाणें सर्व पदें वक्रक्रमानें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अ : ब : : ग : ह, ब : क : : फ : ग आणि क : ड ई : फ, त्यास अ : ड : : ई : ह हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{अ}{ब} = \frac{ग}{ह}$, $\frac{ब}{क} = \frac{फ}{ग}$ आणि $\frac{क}{ड} = \frac{ई}{फ}$ असें आहे, तेव्हां ह्या सर्व समीकरणांचा गुणाकार घेतला असतां $\frac{अ \cdot ब \cdot क}{ब \cdot क \cdot ड} = \frac{ग \cdot फ \cdot ई}{ह \cdot ग \cdot फ}$ संक्षेपानें $\frac{अ}{ड} = \frac{ई}{ह}$ असें राहातें, म्हणून अ : ड : : ई : ह हें उघड आहे.

१३ सिद्धांत.

जीं चार पदें प्रमाणांत असतात त्यांचा कोणताही घात केला किंवा कोणतेंही घातमूळ काढलें तरी तीं पदें प्रमाणांत असतात.

अ, ब, क आणि ड हीं चार पदें प्रमाणांत आहेत, त्यास त्यांचा कोणताही घात केला, किंवा त्यांचें कोणतेंही घातमूळ काढलें तरी तीं प्रमाणांत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ ह्या समीकरणाचे दोन्ही पक्षांना न घात कर. तेव्हां $\left(\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\right)^{\text{न}} = \left(\frac{\text{क}}{\text{ड}}\right)^{\text{न}}$ म्हणजे $\frac{\text{अ}^{\text{न}}}{\text{ब}^{\text{न}}} = \frac{\text{क}^{\text{न}}}{\text{ड}^{\text{न}}}$ म्हणून $\text{अ}^{\text{न}} : \text{ब}^{\text{न}} :: \text{क}^{\text{न}} : \text{ड}^{\text{न}}$ हें सिद्ध. आतां $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ ह्या समीकरणाचें न घातमूळ काढ. तेव्हां $\sqrt[\text{न}]{\frac{\text{अ}}{\text{ब}}} = \sqrt[\text{न}]{\frac{\text{क}}{\text{ड}}}$ म्हणजे $\frac{\sqrt[\text{न}]{\text{अ}}}{\sqrt[\text{न}]{\text{ब}}} = \frac{\sqrt[\text{न}]{\text{क}}}{\sqrt[\text{न}]{\text{ड}}}$ म्हणून $\sqrt[\text{न}]{\text{अ}} : \sqrt[\text{न}]{\text{ब}} :: \sqrt[\text{न}]{\text{क}} : \sqrt[\text{न}]{\text{ड}}$ हें सिद्ध.

१४ सिद्धांत.

जर कितीएक पदें प्रमाणांत असलीं, तर

पहिल्या अग्रसरास जर पहिला उपाग्रसर तर सर्व अग्रसरांचे बेरजेस सर्व उपाग्रसरांची बेरीज.

अ, ब, क, ड, ई, फ, ग, ह हीं पदें प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे अ : ब : : क : ड : : ई : फ : : ग : ह त्यास अ : ब : : अ + क + ई + ग : ब + ड + फ + ह हें सिद्ध करावयाचें.

अब = अब | असें आहे, त्यास ह्या समीकरणांची
अड = बक | बेरीज घेतली असतां अब + अ
अफ = बई | ड + अफ + अह = अब
अह = बग | बक + बई + बग असें होतें.

हें समीकरण अ (ब + ड + फ + ह) = ब (अ + क + ई + ग) असें लिहिल्यास चालेल. ह्मणजे अ : ब : : अ + क + ई + ग : ब + ड + फ + ह, हें सिद्ध.

कु० ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं कितीएक पदें प्रमाणांत असल्यास कोणत्याही अग्रसरास जर त्याचा उपाग्रसर तर सर्व अग्रसरांचे बेरजेस सर्व उपाग्रसरांची बेरीज.

१५ सिद्धांत.

जर तीन पदें अखंड प्रमाणांत असलीं, तर पहिल्या पदास जर तिसरें पद तर पहिले पदाचे वर्गास दुसरे पदाचा वर्ग.

अ, ब, क हीं तीन पदें अखंड प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अ : ब :: ब : क, त्यास अ : क :: अ^2 : ब^2 हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{ब}}{\text{क}}$ असें आहे, त्यास ह्या समीकरणास $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ ह्यानें गुणलें असतां $\frac{\text{अ}^2}{\text{ब}^2} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$ म्हणजे अ : क :: अ^2 : ब^2 हें सिद्ध.

१६ सिद्धांत.

जर चार पदें अखंड प्रमाणांत असलीं, तर पहिल्या पदास जर चवथें पद तर पहिल्या पदाचे घनास दुसरे पदाचा घन.

अ, ब, क, ड हीं चार पदें अखंड प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अ : ब :: ब : क :: क : ड त्यास अ : ड :: अ^3 : ब^3 हें सिद्ध करावयाचें.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{ब}}{\text{क}}$, $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ आणि $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$

असें आहे, तेव्हां ह्या समीकरणांचा गुणाकार घेतला असतां $\frac{\text{अ}^2}{\text{ब}^2} = \frac{\text{अ}}{\text{ड}}$ असें होतें, म्हणजे $\text{अ} : \text{ड} :: \text{अ}^3 : \text{ब}^3$ हें सिद्ध.

६ बूक.

व्याख्या.

१ सगळ्या रेघेस जर मोठा खंड तर मोठ्या खंडास लहानखंड ह्या प्रमाणें एकारेघेचे दोन खंड पाडले असतां अंत्य मध्य प्रमाणानें त्या रेघेचे खंड पडले असें म्हणतात.

२ सगळ्या रेघेस जर एका टोंकाकडील खंड तर दुसरे टोंकाकडील खंडास मध्यखंड, ह्या प्रमाणें एका रेघेचे तीन खंड पाडले असतां गायन प्रमाणानें त्या रेघेचे खंड पडले असें म्हणतात.

३ पहिले रेघेस जर तिसरी रेघ तर पहिली आणि दुसरी ह्यांच्या वजाबाकीस दुसरी आणि तिसरी ह्यांची वजाबाकी, ह्या प्रमाणें तीन रेघा असल्या तर त्या गायन प्रमाणांत आहेत असें म्हणतात.

४ ह्या वरील प्रमाणांत तीन रेघां पैकीं मध्य रेघेस गायनमध्यरेघा असें म्हणतात.

५ एका बिंदूपासून चार रेघा निघून त्यांनीं एका रेघेस गायनप्रमाणानें छेदलें असतां त्या रेघांस

गायन प्रमाण छेदक रेषा असें म्हणतात.

६ ज्या दोन आकृतींमध्यें एका आकृतीचे कोन प्रत्येकीं दुसऱ्या आकृतीचे कोनाबरोबर असतात, व समान कोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत असतात, त्या आकृतींस सरूपाकृति असें म्हणतात.

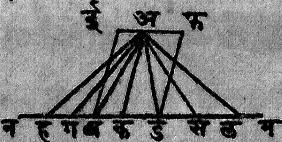
७ एका आकृतीच्या दोन बाजूं पैकीं एके बाजूस जर दुसऱ्या आकृतीच्या दोन बाजूं पैकीं एक बाजू तर त्याच आकृतीचे दुसरे बाजूस पहिले आकृतीची दुसरी बाजू, असें असल्यास त्या दोन आकृतींच्या त्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, असें म्हणतात.

६ बूक.

१ सिद्धांत.

एका उंचीचे त्रिकोण व समांतरभुज चौकोन हे आपल्या पायांशीं प्रमाणांत असतात.

अबक आणि अकड त्रिकोण व ईक आणि फक समांतरभुजचौकोन एका उंचीचे* आहेत, त्यास ते त्रिकोण व समांतरभुज चौकोन आपले पायांशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणजे बक: कड:: अबक: अकड, तसेंच बक: कड:: ईक: फक, हें सिद्ध करावयाचें.



बड बाजू दोहीं अंगांस न आणि म बिंदूंपर्यंत वाढीव. बक रेघे एवढे बग आणि गह असे दोन भाग बन रेघेचे पाड, व कम

* उंची ह्या शब्दानें लंबरूप उंची समजावयाची, आणि अ शिरोबिंदूपासून बड पायावर जो लंब होईल तो येथें उंची होय.

रेघेचें कड रेघे एवढे डस आणि सल असे दोन भाग पाड. अ,ह अ,ग अ,स आणि अ,ल बिंदु सांध. हग, गब आणि बक रेघा बरोबर आहेत, ह्याकरितां (१ बु॰ ३८ व्या सि॰ प्र॰) अहग, अगब आणि अबक हे त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत, ह्या प्रमाणेंच अकड, अडस आणि असल हे त्रिकोण परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून हक पाया बकच्या जितकेपट आहे तितकेपट अहक त्रिकोण अबक त्रिकोणाच्या आहे, तसेंच कल पाया कड च्या जितकेपट आहे तितकेपट अकल त्रिकोण अकड त्रिकोणाच्या आहे. जर हक पाया कल पाया बरोबर असेल तर अहक त्रिकोण अकल त्रिकोणाबरोबर होईल; जर हक पाया कल पायापेक्षां मोठा असेल तर अहक त्रिकोण अकल त्रिकोणापेक्षां मोठा होईल; आणि जर हक पाया कल पायापेक्षां लहान असेल तर अहक त्रिकोण अकल त्रिकोणापेक्षां लहान होईल. बक आणि कड पाये आणि अबक आणि अकड त्रिकोण अशीं चार पदें आहेत. प्रथम पद बक पाया

आणि तिसरें पद अबक त्रिकोण ह्यांचीं समान
व्यापकें हक पाया आणि अहक त्रिकोण आ-
हेत, व दुसरें पद कड पाया आणि चौथें पद अ
कड त्रिकोण ह्यांचीं समान व्यापकें कल पाया
आणि अकल त्रिकोण आहेत, आणि पूर्वीं दर्श-
विलें आहे, कीं हक पाया जर कल पायापेक्षां मो-
ठा असेल, तर अहक त्रिकोण अकल त्रिको-
णापेक्षां मोठा होईल, बरोबर असल्यास बरोबर हो-
ईल व लहान असल्यास लहान होईल, म्हणून
(५ बु० ५ व्या० व्या० व०) बक पायास जर कड
पाया तर अबक त्रिकोणास अकड त्रिकोण,
ह्या करितां एका उंचीचे त्रिकोण आपल्या पायांचीं
प्रमाणांत असतात, हें सिद्ध.

(१ बु० ४१ व्या सि० प्र०) ईक समांतरभु-
ज चौकोन अबक त्रिकोणाच्या दुप्पट आहे,
आणि फक समांतरभुजचौकोन अकड त्रि-
कोणाच्या दुप्पट आहे, आणि पदें आपल्या समान
व्यापकांचीं प्रमाणांत असतात, हें उघड आहे, ह्याक-
रितां अबक त्रिकोण: अकड त्रिकोण :: ईक

चौरस : फक चौरस. वर सिद्ध केलें आहे, कीं बक : कड : : अबक : अकड ह्याकरितां (६ बु० ४थ्या सि० प्र०) बक : कड : : ईक : फक

१ कु० समान उंचीचे त्रिकोण व समांतरभुज चौकोन हे आपल्या पायांचीं प्रमाणांत असतात, हें वरील सिद्धतेवरून स्पष्ट आहे.

ह्या आकृति अशा ठेवाव्या, कीं त्यांचे पाये एकाच सरळरेषेंत येतील. आतां, ह्या आकृतींचीं शिरें सांधणारी रेषा त्यांचे पाये ज्या रेषेंत आहेत तिचीं समांतर होईल, हें (१ बु० ३४ व्या सि० कु० वरून) स्पष्ट आहे. हा सिद्धांत सिद्ध करून दाखविण्याकरितां जी आकृति केली आहे ती प्रमाणें आकृति केली असतां ही कुरलरी सिद्ध होईल.

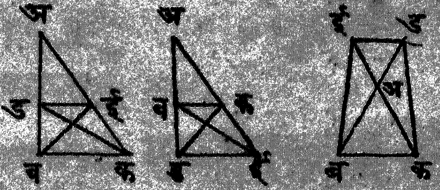
२ कु० ज्यांचे पाये समान आहेत असे काटकोन चौकोन समांतरभुज चौकोन व त्रिकोण हे आपल्या उंचीचीं प्रमाणांत असतात.

२ सिद्धांत.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही बाजूचीं एकरेषा समांतर केली असतां ती रेषा त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन

बाजूंस त्या आहेत तशाच असतां किंवा त्या वाढविल्या असतां प्रमाणानें छेदते, आणि जी रेषा त्रिकोणाच्या दोन बाजूंस त्या आहेत तशा असतां किंवा त्या वाढविल्या असतां प्रमाणानें छेदते ती रेघ त्रिकोणाचे तिसरे बाजूशीं समांतर असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याच्या बक बाजूशीं डई रेघ समांतर केली आहे, त्यास डई रेघ अबक त्रिकोणाच्या



दुसऱ्या दोन अब आणि अक ह्या बाजूंस प्रमाणानें छेदते, म्हणजे बड: डअ :: कई: ईअ, हें सिद्ध करावयाचें.

ब,ई आणि क,ड सांध. बईड आणि कडई हे दोन त्रिकोण डई पायावर आणि डई आणि बक ह्या दोन समांतर रेघांच्या जोडांत आहेत, ह्याकरितां (१बु० ३७ व्या सि० प्र०) ते दोन त्रिकोण समान आहेत. समान पदांचे दुसरे एका पदाशीं समानच गुणोत्तर असतें, हें स्पष्ट

आहे, ह्या करितां बईड आणि कईड ह्या दोन त्रिकोणांचें अडई त्रिकोणाशीं समानच गुणोत्तर आहे, म्हणजे बईड : अडई : : कडई : अडई. बईड आणि अडई हे दोन त्रिकोण एकेच उंचीचे आहेत, व कडई आणि अडई हे दोन त्रिकोणही एकेच उंचीचे आहेत, ह्या करितां (६ बु० १ल्या सि० स०) बईड : अडई : : बड : डअ, आणि कडई : अडई : : कई : ईअ, ह्या करितां (५ बु० ४थ्या सि० स०) बड : डअ : : कई : ईअ, हें सिद्ध.

आतां अबक त्रिकोणाच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजूंस डई रेघ प्रमाणानें छेदते, त्यास ती रेघ बक शीं समांतर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

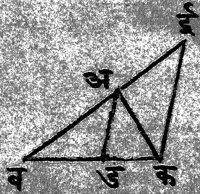
ड, क आणि ब, ई सांध. बड : डअ : : कई : ईअ असें गृहीतच आहे, व (६ बु० १ल्या सि० स०) बड : डअ : : बडई : ईडअ, व कई : ईअ : : कडई : डईअ, ह्या वरून हें स्पष्ट आहे, की बडई : ईड

अ : : कड ई : ड ई अ; म्हणजे ईडअ त्रिकोणाचीं बड ई व कड ई ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर एक आहे, व ह्यास्तव (५ बु० २ऱ्या सि० प्र०) बड ई आणि कड ई हे दोन त्रिकोण बरोबर आहेत. हे दोन त्रिकोण एकेच पायावर आहेत, पण एकाच पायावरील समान त्रिकोण (१ बु० ३९ व्या सि० प्र०) समांतर रेघांचे जोडांत असतात, ह्याकरितां डई रेघ बक रेघेशीं समांतर आहे, हें सिद्ध.

२ सिद्धांत.

त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे समान दोन भाग करणारी अशी रेघ पायापर्यंत केली असतां त्या रेघेनें पायाचे जे दोन खंड होतात, ते खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असतात; व कोणत्याही त्रिकोणाच्या पायाचे दोन खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असल्यास छेदनबिंदूपासून शिरकोनापर्यंत रेघ केली तर ती रेघ शिरकोनाचे समान दोन भाग करिते.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याच्या ब अ क शिरकोनाचे अड रेघ दोन समान भाग



करिते, आणि बक पायास ड बिंदुस्थळीं छेदिते, त्यास बड : डक :: अब : अक, हें सिद्ध करावयाचें.

(१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) क बिंदूतून कई रेघ अड रेघेशीं समांतर कर, आणि बअ रेघ ई बिंदूस मिळे तोंपर्यंत वाढीव. अड आणि ईक ह्या दोन समांतर रेघांस अक रेघ मिळते, तेव्हां (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) अकई कोन कअड कोनाबरोबर आहे, परंतु बअड कोन कअड कोनाबरोबर आहे, कारण बअक कोनाचे अड रेघ दोन समान भाग करिते, ह्या करितां बअड कोन अकई कोनाबरोबर आहे; बई रेघ अड आणि ईक ह्या दोन समांतर रेघांस छेदते, ह्या करितां बाहेरील बअड कोन बईक कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अकई कोन अईक कोनाबरोबर आहे, आणि ह्या करितां (१ बु० ६ व्या सि० प्र०) अई बाजू अक बाजूबरोबर आहे. बईक त्रिकोणाच्या

ईक बाजूशीं अड रेघ समांतर केली आहे, ह्याकरितां (६ बु० २ ऱ्या सि० म०) बड: डक:: बअ: अई. अई अक बरोबर आहे, ह्याकरितां बड: डक:: बअ: अक, हें सिद्ध.

अबक त्रिकोणाच्या बक पायाचे बड आणि कड हे दोन खंड बअ आणि अक ह्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणजे बड: डक:: अब: अक, त्यास ड छेदनबिंदु आणि अ शिरकोन ह्यांस सांधणारी अड रेघ बअक शिरकोनाचे दोन समान भाग करिते, हें सिद्ध करावयाचें.

पूर्वीप्रमाणेंच आकृति कर. बड: डक:: अब: अक असें गृहीत आहे, व अड बाजू ईक बाजूशीं समांतर आहे, ह्याकरितां (६ बु० २ ऱ्या सि० म०) बड: डक:: अब: अई, ह्यास्तव (५ बु० ४ थ्या सि० म०) अब: अक:: अब: अई म्हणून (५ बु० ९ व्या सि० म०) अक आणि अई ह्या दोन बाजू समान आहेत, ह्याकरितां (१ बु० ५ व्या सि० म०) अकई कोन अ

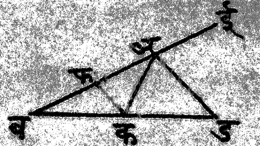
ईक कोनाबरोबर आहे; अड आणि ईक ह्या दोन रेघा समांतर आहेत, म्हणून अईक कोन बाहेरील बअड कोनाबरोबर आहे, व अकई व्युत्क्रमकोन डअक व्युत्क्रमकोनाबरोबर आहे, ह्यास्तव बअक कोनाचे अड रेघेनें दोन समान भाग केले आहेत, हें सिद्ध.

अ सिद्धांत.

त्रिकोणाच्या बाहेरील कोनाचे दोन समान भाग करणारी आणि पाया वाढविला असतां त्यास मिळणारी अशी रेघ केली असतां ती रेघ आणि पायाचे दोन शेवट ह्यांच्यामध्यें जे पायाचे दोन खंड पडतात ते दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असतात. त्रिकोणाचा पाया वाढविला असतां त्याचे जे दोन खंड पडतात, ते दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असल्यास शिरकोनापासून छेदनबिंदूपर्यंत रेघ केली असतां ती बाहेरील कोनाचे दोन समान भाग करते.

अबक त्रिकोणाच्या बाहेरील कअई कोनाचे दोन समान भाग करणारी व बक पाया वाढविला आहे, त्याला ड बिंदुस्थलीं मिळणारी

अशी एक अड रेघ केली आहे. अड रेघ आणि बक पायाचीं ब आणि क शेवटें ह्यांच्या मधील जे बड आणि डक खंड ते अब आणि अक ह्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणजे बड : डक :: अब : अक, हें सिद्ध करावयाचें.



(१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) क बिंदूंतून कफ रेघ अड शीं समांतर कर. फक आणि अड ह्या दोन समांतर रेघांस अक रेघ मिळते, त्यास (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) फकअ कोन कअड कोनाबरोबर आहे. पण कअड कोन डअई कोनाबरोबर आहे, असें गृहीत आहे, ह्यास्तव फकअ कोन डअई कोनाबरोबर आहे. फक आणि अड ह्या दोन समांतर रेघांवर बफअ रेघ पडते, तेव्हां बाहेरील डअई कोन आंतील पलीकडच्या अफक कोनाबरोबर आहे; आतांच तुकतें सिद्ध केलें, कीं डअई कोन अकफ कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अकफ कोन अफक कोनाबरोबर आहे, म्हणून (१ बु० ६ व्या

सि॰ प्र॰) अफ बाजू अक बाजूबरोबर आहे, अबड त्रिकोणाच्या अड बाजूंशीं फक रेघ समांतर आहे, ह्याकरितां (६ बु॰ २ऱ्या सि॰ प्र॰) बड: डक : : बअ: अफ, पण अफ अक बरोबर आहे, ह्याकरितां बड: डक : : बअ: अक, हें सिद्ध.

अबक त्रिकोणाचा बक पाया ड पर्यंत वाढविला आहे, व त्याचे बड आणि कड हे दोन खंड बअ आणि अक ह्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, त्यास अड रेघ कअई कोनाचे समान दोन भाग करिते, हें सिद्ध करावयाचें.

आकृति पूर्वीप्रमाणेंच कर. बड: डक : : बअ: अक हें गृहीत आहे, व (६ बु॰ २ऱ्या सि॰ प्र॰) बड: डक : : बअ: अफ, ह्याकरितां (५ बु॰ ४थ्या सि॰ प्र॰) बअ: अक : : बअ: अफ, ह्यावरून (५ बु॰ ३ऱ्या सि॰ प्र॰) अक, अफ बरोबर आहे, म्हणून (१ बु॰ ५व्या सि॰ प्र॰) अफक कोन अकफ कोनाबरोबर आहे, परंतु अफक कोन बाहेरील ईअड कोनाबरोबर आहे, आणि अकफ कोन

क अ ड व्युत्क्रमकोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां ई अड कोन क अ ड कोनाबरोबर आहे.

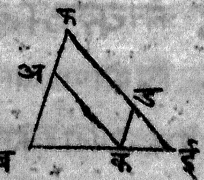
कु० त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे दोन समान भाग करणारी रेघ व शिरकोनाजवळील बाहेरच्या कोनाचे दोन समान भाग करणारी रेघ ह्या रेघा पाया वाढविला असतां त्यास गायन प्रमाणानें छेदितात.

टीप मागील सिद्धांताची प्रतिज्ञा व ह्या सिद्धांताची प्रतिज्ञा ह्या दोन्ही मिळून एक प्रतिज्ञा लिहिली असतां चालेल, ती अशी कीं त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे दोन समान भाग करणारी रेघ व शिरकोनाजवळच्या बाहेरील कोनाचे दोन समान भाग करणारी रेघ ह्या दोन्ही रेघा वाढविल्या असतां पायास मिळतात, तर त्या पायाचे आंतल्या अंगास व बाहेरल्या अंगास जे खंड पाडतात ते दुसऱ्या दोन बाजूंचीं प्रमाणांत असतात.

४ सिद्धांत.

समकोण त्रिकोणांत समकोणाजवळच्या बाजू परस्पर प्रमाणांत असतात, आणि समकोणासमोरील बाजू सजातीय असतात, म्हणजे प्रमाणांत अग्रसर किंवा उपाग्रसर असतात.

अबक आणि डकई असे दोन समकोण त्रिकोण आहेत. अबक त्रिकोणाचा ब कोन डकई त्रिकोणाच्या क कोनाबरोबर आहे.



अकब कोन डईक कोनाबरोबर आहे, व बअक कोन कडई कोनाबरोबर आहे, त्यास ह्या दोन त्रिकोणांच्या समकोनांजवळील बाजू प्रमाणांत आहेत, व त्यां समोरील बाजू सजातीय आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

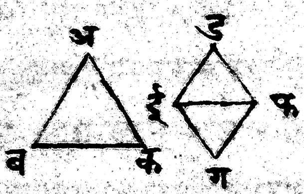
डकई त्रिकोण असा ठेव, कीं त्याची कई बाजू बक बाजूस लागेल आणि त्या दोन्ही एका रेषेंत येतील. (१ बु॰ १७ व्या सि॰ प्र॰) अबक आणि अकब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत, ह्याकरितां अबक कोन आणि अकब कोनाबरोबरचा कोन डईक हेही मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत, तेव्हां (१ बु॰ २९ व्या सि॰ कु॰ प्र॰) बअ आणि ईड रेघा वाढविल्या असतां त्या कोठेंतरी मिळतील, त्या फ स्थळीं मिळतात असें मानू. अबक कोन डकई

कोना बरोबर आहे, व अकब कोन डईक कोना बरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बु० २८ व्या सि० म०) बफ बाजू कड बाजूशीं समांतर आहे, व अक बाजू फई बाजूशीं समांतर आहे, ह्याकरितां अकडफ समांतरभुजचौकोन आहे. (१ बु० ३४ व्या सि० म०) अक, डफ बाजू बरोबर आहे, व अफ बाजू कड बाजू बरोबर आहे. फबई त्रिकोणाच्या फई बाजूशीं अक रेघ समांतर आहे, ह्याकरितां (६ बु० २ व्या सि० म०) बअ: अफ:: बक: कई, पण अफ कड बरोबर आहे, ह्याकरितां बअ: कड:: बक: कई. परावर्तनानें बअ: बक:: कड: कई; बफ रेघेशीं कड रेघ समांतर आहे, ह्याकरितां बक: कई:: फड: डई, पण फड, अक बरोबर आहे, म्हणून बक: कई:: अक: डई. परावर्तनानें बक: अक:: कई: डई, आणि अब: बक:: डक: कई असें नुकतेंच सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अब: अक:: डक: डई हें उघड आहे.

५ सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांच्या प्रत्येक कोनाजवळच्या बाजू परस्पर प्रमाणांत असतात ते दोन त्रिकोण समकोण असतात, आणि त्यांचे समकोन सजातीय बाजूंच्या समोर असतात.

अबक आणि डईफ या दोन त्रिकोणांच्या प्रत्येक कोनाजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, त्या अशा कीं अब : बक :: डई : इफ; बक : कअ :: ईफ : फड; आणि बअ : अक :: ईड : डफ, त्यास अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, आणि त्यांच्या सजातीय बाजूं समोर समान कोन आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.



(१ बु० २३ व्या सि० प्र०) ईफ रेषेंत ई बिंदूजवळ अबक कोनाबरोबर असा एक फईग कोन कर, तसेंच फ बिंदुजवळ बकअ कोना एवढा ईफग कोन कर. (१ बु० ३२ व्या

सि० प्र०) ब अ क कोन ई ग फ कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ ब क आणि ग ई फ हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, आणि म्हणून (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) त्या त्रिकोणांच्या समकोनांसमोरील बाजू परस्पर प्रमाणांत आहेत, ह्याकरितां अ ब: ब क:: ग ई: ई फ; आणि अ ब: ब क:: ड ई: ई फ असें गृहीत आहे, ह्याकरितां (५ बु० ४थ्या सि० प्र०) ड ई: ई फ:: ग ई: ई फ. आतां ड ई आणि ग ई ह्या दोन रेषांचें ई फ शीं गुणोत्तर सम आहे, ह्याकरितां (५ बु० ३ ऱ्या सि० प्र०) ड ई आणि ग ई परस्परबरोबर आहेत. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल, कीं ड फ बाजू फ ग बाजूबरोबर आहे. ड ई फ आणि ई फ ग ह्या दोन त्रिकोणांत ई ड बाजू ई ग बाजूबरोबर आहे, ड फ, फ ग बरोबर आहे, आणि ई फ बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्याकरितां (१ बु० ८ व्या सि० प्र०) ड ई फ कोन ग ई फ कोनाबरोबर आहे, ड फ ई कोन ग फ ई कोनाबरोबर आहे, व ई ड फ कोन ई ग फ कोनाबरोबर आहे. ड ई फ कोन ग ई फ कोनाबरोबर आहे, आणि ग ई फ कोन अ ब क

कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अबक कोन डई फ कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याच कारणास्तव अकब कोन डफई कोनाबरोबर आहे, व अ कोन ड कोनाबरोबर आहे, म्हणून अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं समकोण आहे, हें सिद्ध.

६ सिद्धांत.

ज्या दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो, आणि समकोनां जवळच्या बाजू परस्पर प्रमाणांत असतात, ते दोन त्रिकोण समकोण असतात, आणि त्यांचे समकोन सजातीय बाजू समोर असतात.

अबक आणि डईफ असे दोन त्रिकोण आहेत. अबक त्रिकोणाचा अ कोन डईफ त्रिकोणाच्या ड कोनाबरोबर

आहे, आणि अ आणि ड ह्या समान कोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणजे ब अ:

अ क : : ई ड : ड फ, त्यास अ ब क आ-णि ड ई फ हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, आ-णि अ ब क त्रिकोणाचा ब कोन ड ई फ त्रि-कोणाच्या ई कोनाबरोबर आहे, व क कोन फ कोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

(१ बु० २३ व्या सि० प्र०) ड फ रेषेंत ड बिंदूजवळ ब अ क किंवा ई ड फ कोना-बरोबर फ ड ग कोन कर, व फ बिंदूजवळ ब क अ कोनाबरोबर ड फ ग कोन कर. (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) अ ब क त्रिकोणाचा बाकी राहिलेला ब कोन फ ड ग त्रिकोणाच्या बाकी राहिलेल्या ग कोनाबरोबर आहे; म्हणून अ ब क आणि ड ग फ हे दोन त्रिकोण सम-कोण आहेत; आणि ह्याकरितां (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) ब अ : अ क : : ग ड : ड फ, आणि ब अ : अ क : : ई ड : ड फ असें गृहीत आहे, ह्याकरितां (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) ई ड : ड फ : : ग ड : ड फ. आतां ई ड आणि ग ड ह्या दोन बाजूंचें ड फ रेषेशीं गुणोत्तर समान आहे, ह्याकरितां (५ बु० ९ व्या सि० प्र०) ई ड

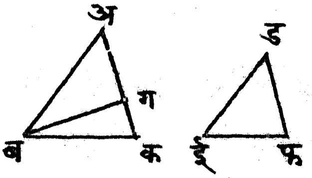
बाजू गड बाजूबरोबर आहे. डईफ आणि गडफ ह्या दोन त्रिकोणांत ईड बाजू गड बाजूबरोबर आहे व डफ दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, व ईडफ कोन गडफ कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां (१ बु॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰) डफई कोन डफग कोनाबरोबर आहे व ई कोन ग कोनाबरोबर आहे, परंतु डफग कोन अकब कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अकब कोन डफई कोनाबरोबर आहे, व बअक कोन ईडफ कोनाबरोबर आहे असें गृहीत आहे, ह्याकरितां बाकीचा ब कोन बाकीच्या ई कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं समकोण आहे, हें सिद्ध.

७ सिद्धांत.

जर दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असला व एका त्रिकोणाचा दुसऱ्या कोनाजवळच्या बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दुसऱ्या कोनाजवळच्या बाजूशीं प्रमाणांत असल्या व एकाचा राहिलेला तिसरा कोन व दुसऱ्या

त्रिकोणाचा राहिलेला तिसरा कोन ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोनाहून कमी असला किंवा नसला, तर ते दोन त्रिकोण समकोण असतात, व ज्या कोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत ते कोन परस्परबरोबर असतात.

अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिकोणांत अबक त्रिकोणाचा अ कोन डईफ त्रिकोणाच्या ड कोना बरोबर आहे, अबक कोना जवळच्या अब आणि बक ह्या



बाजू डईफ कोनाजवळच्या डई आणि ईफ ह्या बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत, व बाकी राहिलेल्या क आणि फ कोनांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोनापेक्षां लहान आहे, असें प्रथमतः मानूं, त्यास अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणजे अबक कोन डईफ कोनाबरोबर आहे, व अकब कोन डफई कोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

अबक आणि डईफ हे दोन कोन

परस्पर बरोबर नाहींत असें म्हटल्यास त्यांपेकीं एक दुसऱ्यापेक्षां मोठा आहे, असें मानलें पाहिजे, त्यास अबक कोन डईफ कोनापेक्षां मोठा आहे, असें मानूं.

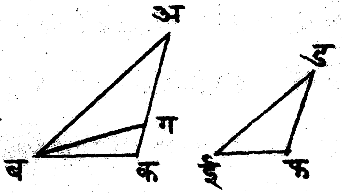
(१ बु० २३ व्या सि० प्र०) अब रेषेंत ब बिंदूजवळ डईफ कोना एवढा अबग कोन कर. अ कोन ड कोनाबरोबर आहे, व अबग कोन डईफ कोनाबरोबर केला आहे, ह्या करितां (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) बाकी राहिलेला अगब कोन बाकीच्या डफई कोनाबरोबर आहे, ह्या करितां अबग आणि डईफ हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) अब : बग : : डई : ईफ, परंतु अब : बक : : डई : ईफ असें गृहीत आहे, ह्या करितां (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) अब : बक : : अब : बग, आतां बक आणि बग ह्या दोन बाजूंचें अक रेषेशीं गुणोत्तर समान आहे, ह्या करितां (५ बु० २ ऱ्या सि० प्र०) बक, बग बरोबर आहे, ह्या करितां (१ बु० ६ व्या सि० प्र०) बगक कोन बकग कोनाबरोबर

आहे; ब क ग कोन काटकोनापेक्षां लहान आहे, असें गृहीत आहे, ह्याकरितां ब ग क कोनही काटकोनापेक्षां लहान आहे; म्हणून (१ बु० १२ व्या सि० प्र०) अ ग ब कोन काटकोनापेक्षां मोठा आहे. परंतु अ ग ब कोन फ कोनाबरोबर आहे, असें पूर्वी दर्शविलें आहे, ह्याकरितां फ कोन, काटकोनापेक्षां मोठा आहे, परंतु तो काटकोनापेक्षां लहान आहे असें गृहीत आहे, ह्याकरितां एकच कोन काटकोनापेक्षां मोठा आणि लहान होणें ही गोष्ट अशक्य आहे, ह्याकरितां अ ब क आणि ड ई फ हे कोन असमान नाहींत तर ते समान आहेत; अ कोन ड कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ ब क त्रिकोणाचा तिसरा क कोन ड ई फ त्रिकोणाच्या तिसऱ्या फ कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ ब क त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणाशीं समकोण आहे, हें सिद्ध.

आतां क आणि फ ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोनापेक्षां लहान नाहीं असें मानूं.

आकृति पहिल्या प्रकारांत केली आहे, त्या प्रमाणेंच करून ही गोष्ट सिद्ध करतां येईल, कीं ब क बाजू ब ग बाजूबरोबर आहे, आणि क कोन ब

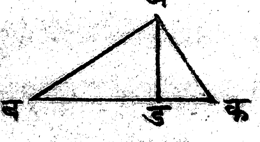
ग क कोनाबरोबर आहे. क कोन काटकोनापेक्षां कमी नाहीं, ह्याकरितां ब ग क कोनही काटकोनापेक्षां कमी नाहीं, तेव्हां ब ग क त्रिकोणाचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी नाहींत, त्यास असें होणें (१ बु० १७ व्या सि० प्र०) अशक्य आहे, ह्याकरितां पहिल्या प्रकारांत सिद्ध केलें आहे, त्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं अ ब क त्रिकोण ड ई फ त्रिकोणाशीं समकोण आहे.



८ सिद्धांत.

काटकोन त्रिकोणांत काटकोनापासून कर्णावर लंब केला असतां त्याच्या दोहों अंगांस जे दोन काटकोन त्रिकोण पडतात ते सगळ्या त्रिकोणाशीं सरूप असतात, व परस्परांशीं सरूप असतात.

अ ब क एक काटकोन त्रिकोण आहे. त्याच्या ब अ क काटकोनापासून ब क कर्ण



रेषेवर अड लंब केला आहे, त्यास अड लंबाचे दोहों बाजूंस जे अबड व अकड असे दोन काटकोन त्रिकोण पडले आहेत ते अबक त्रिकोणाशीं सरूप आहेत, व परस्परांशीं सरूप आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

अबक आणि अबड ह्या दोन त्रिकोणांत बअक कोन अडब कोनाबरोबर आहे, कारण ते दोन्ही कोन काटकोन आहेत, अबक कोन दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्याकरितां (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) बाकीचा अकब कोन बाकीच्या बअड कोनाबरोबर आहे, म्हणून अबक आणि अबड हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत. ते समकोण आहेत, ह्याकरितां (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) त्यांच्या समकोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणून (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) ते दोन त्रिकोण सरूप आहेत. अडक त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं समकोण आहे व सरूप आहे, हें ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें. अबड आणि अकड हे दोन त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं सरूप आहेत, ह्याकरितां ते परस्परांशीं सरूप आहेत, हें सिद्ध.

कु॰ ह्यावरून ही गोष्ट उघड दिसून येते, कीं काटकोन त्रिकोणाच्या काटकोनापासून कर्णावर लंब केला असतां त्याच्या योगानें कर्णाचे जे दोन खंड पडतात त्यांचे मध्य प्रमाण लंब आहे, व दुसऱ्या दोन बाजूं पैकीं प्रत्येक बाजू कर्ण व त्या बाजू कडील कर्णाचा भाग ह्यांचें मध्यप्रमाण आहे, कारण अबड आणि अडक हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, ह्याकरितां (६ बु॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰)

बड: डअ :: डअ: डक. अबक आणि अबड हे त्रिकोण सरूप आहेत, ह्यास्तव

बक: बअ :: बअ: बड. अबक आणि अकड हे त्रिकोण सरूप आहेत, ह्या करितां बक: कअ :: कअ: कड.

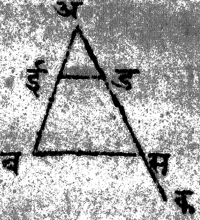
९ सिद्धांत.कृत्य.

कोणत्याही सरळ रेषेचा असा तुकडा पाडावयाचा आहे, कीं ती रेघ त्या तुकड्याच्या विवक्षित पट होईल.

अब एक सरळ रेघ आहे, तिचा एक असा तुकडा पाडावयाचा आहे, कीं ती रेघ त्या तुक-

ह्याच्या विवक्षित पट होईल.

अब रेषेशीं कोणता तरी कोन करणारी अशी एक अमर्याद अक रेघ अ बिंदूपासून काढ, आणि त्या रेषेंत ड बिंदु घेऊन



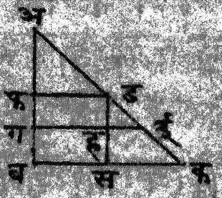
अकचा अडच्या विवक्षित पट असा अस तुकडा पाड, आणि ब,स सांध, व बस शीं डई रेघ समांतर कर.

अबस त्रिकोणाच्या बस बाजूशीं ईड रेघ समांतर आहे, ह्याकरितां (६ बु॰ २ त्या सि॰ प्र॰) सड: डअ:: बई: ईअ. (५ बु॰ ७ व्या सि॰ प्र॰) मिश्रणानें सअ: डअ:: बअ: ईअ. ह्यावरून स्पष्ट आहे, कीं सअ, डअच्या जितक्या पट आहे, तितक्या पट बअ, ईअच्या आहे. परंतु सअ रेघ डअच्या विवक्षित पट आहे, ह्याकरितां अब रेघ ईअच्या विवक्षितपट आहे, हें उघड आहे, ह्याकरितां अई हा अबचा पाहिजे असा तुकडा पडला असे.

१० सिद्धांत. कृत्य.

कोणत्याही दोन रेषांपैकीं एक रेघ छिन्न अ
त्यास छिन्न रेघेच्या भागांशीं सरूप असे दुसऱ्य
रेघेचे भाग पाडावयाचे, म्हणजे दुसऱ्या रेघेचे अ
भाग पाडावयाचे कीं त्या भागांतील गुणोत्तरें आणि
छिन्न रेघेच्या भागांतील गुणोत्तरें हीं सारखीं हो
तील.

अ ब आणि अ क अशा दोन रेघा आहेत, त
पैकीं अ क रेघ छिन्न आहे, त्यास अ क रेघेच्या भागांशीं सरूप असे अ ब रेघेचे भाग पाडावयाचे.



अ क रेघेचे ड आणि ई ह्या स्थळीं भाग के
ले आहेत. अ ब आणि अ क ह्या दोन रेघा त्यांच्
मध्यें कोणता तरी कोन होईल अशा ठेव, आणि
क सांध. (१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) ब क रेघेशी
ड आणि ई ह्या दोन बिंदूंतून ड फ आणि ई ग
अशा दोन रेघा समांतर कर, आणि ड बिंदूंतून

अबचीं डहस रेघ समांतर कर. फह आणि हब ह्या आकृति समांतरभुज चौकोन आहेत, ह्याकरितां (१ बु॰ ३४ व्या सि॰ प्र॰) डह रेघ फग बरोबर आहे, व हस रेघ गब रेघेबरोबर आहे. डसक त्रिकोणाच्या सक बाजूचीं हई रेघ समांतर आहे, ह्याकरितां (६ बु॰ २ व्या सि॰ प्र॰) कई : ईड :: सह : हड, पण सह, बग बरोबर आहे, आणि हड, गफ बरोबर आहे, ह्याकरितां कई : ईड :: बग : गफ; अगई त्रिकोणाच्या गई बाजूचीं फड बाजू समांतर आहे, ह्याकरितां ईड : डअ :: गफ : फअ. कई : ईड :: बग : गफ, आणि ईड : डअ :: गफ : फअ असें सिद्ध झालें, ह्याकरितां अक रेघेच्या भागांचीं सरूप असे अब रेघेचे भाग केले असत.

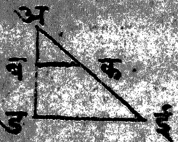
११ सिद्धांत. कृत्य.

त्रिप्रमाणांतील पहिल्या दोन रेषा कळल्या असतां शेवटची तिसरी रेषा काढावयाची.

अब आणि अक ह्या दोन रेषा त्रिप्रमा –

णांतील आहेत, त्यास शेवटची तिसरी रेषा काढा-वयाची.

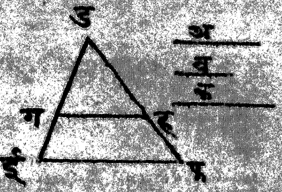
अब आणि अक ह्या रेषा त्यांच्यामध्यें कोन होईल असा ठेव, आणि त्या रेषा वाढीव. नंतर बड, अक बरोबर कर. आणि ब, क सांधून बक रेघेशीं डई रेघ (१बु॰ ३१ व्या सि॰ प्र॰) समांतर कर. अडई त्रिकोणाच्या डई बाजूशीं बक रेघ समांतर आहे, ह्याकरितां (६ बु॰ २ऱ्या सि॰ प्र॰) अब : बड :: अक : कई. बड, अक बरोबर आहे, ह्याकरितां अब : अक :: अक : कई, म्हणून ज्या त्रिप्रमाणांत अब आणि अक बाजू आहेत, त्यांतील तृतीयपद कई बाजू काढली असे.



१२ सिद्धांत. कृत्य.

चतुःप्रमाणांतील पहिल्या तीन रेषा कळल्या असतां चौथी रेषा काढावयाची.

आहेत, त्यास चौथी रेषा काढायाची.



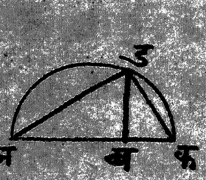
ज्यांच्यामध्यें कोन होईल अशा ड ई आणि ड फ दोन रेषा काढ, आणि अ रेघेबरोबर ड ग रेघ कर, ब रेघेबरोबर ग ई रेघ कर, आणि क रेघेबरोबर ड ह रेघ कर, आणि ग, ह सांध. नंतर (१ बु० ३१ व्या सि० प्र०) ई बिंदूतून ग ह शीं ई फ रेघ समांतर कर. ड ई फ त्रिकोणाच्या ई फ बाजूशीं ग ह बाजू समांतर आहे, ह्याकरितां (६ बु० २ऱ्या सि० प्र०) ड ग : ग ई :: ड ह : ह फ. ड ग, अ रेघेबरोबर आहे, ग ई, ब बरोबर आहे, व ड ह, क बरोबर आहे, ह्याकरितां अ : ब :: क : ह फ, ह्याकरितां ज्या चतुःप्रमाणांत अ, ब, क ह्या तीन रेषा तीन पदें आहेत, त्यांतील चौथें पद ह फ रेषा काढली असे.

१३ सिद्धांत. कृत्य.

त्रि प्रमाणांतील पहिली रेषा आणि शेवटची रेषा कळली असतां मध्यरेषा काढावयाची.

त्रि प्रमाणांतील पहिली आणि शेवटची अशा अब आणि बक ह्या दोन रेषा आहेत, त्यास मध्यरेषा काढावयाची.

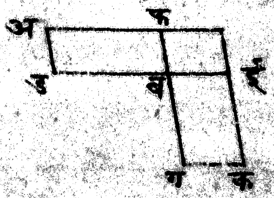
एका सरळ रेषेंत अब आणि बक ह्या रेषा एकाशीं एक लागून ठेव. अक संयुक्त रेषेवर अडक अर्ध वर्तुळ काढ, आणि (१ बु० ११ व्या सि० प्र०) अक वर ब बिंदूतून बड रेषा लंब कर. अ, ड आणि क, ड बिंदु सांध.



(२ बु० ३१ व्या सि० प्र०) अडक कोन काटकोन आहे. अडक काटकोन त्रिकोणांत अडक काटकोनापासून अक कर्णावर डब लंब केला आहे, ह्याकरितां (६ बु० ८ व्या सि० कु० प्र०) अक पायाच्या अब आणि बक खंडांचें बड मध्यप्रमाण आहे, ह्याकरितां अब आणि बक ह्या दोन रेषांचे मध्यपद काढलें असे.

ज्या दोन समान समांतरभुज चौकोनांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो त्या समांतरभुज चौकोनांच्या समकोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतात, व ज्या दोन समांतरभुज चौकोनांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो व त्या समकोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतात ते समांतरभुज चौकोन परस्पर समान असतात.

अब आणि बक दोन समान समांतरभुज चौकोन आहेत, व त्यांचे ब बिंदूजवळचे कोन समान आहेत. डब आणि बई ह्या दोन बाजू जोडून एका सरळ रेषेंत ठेव.



फब आणि बग ह्या दोन रेषा एका सरळरेषेंत येतील, हें (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) उघड आहे, त्यास अब आणि बक ह्या दोन समांतरभुज चौको-

नांच्या समान कोनांच्या आंगच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे डब: बई : : गब: बफ, हें सिद्ध करावयाचें.

ईफ समांतरभुज चौकोन पुरा कर. अब आणि बक समांतर भुज चौकोन आहेत, आणि फई एक समांतरभुज चौकोन आहे, ह्या करितां अब: फई : : बक: फई हें स्पष्ट आहे. (६ बु० १ ल्या सि० प्र०) अब: फई : : डब: बई व बक: फई : : गब: बफ, म्हणून (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) डब: बई : : गब: बफ, तेव्हां अब आणि बक समान समांतर भुज चौकोनांच्या समान कोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, हें सिद्ध.

अब आणि बक समांतरभुज चौकोनांच्या समान कोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे डब: बई : : गब: बफ, त्यास ते समान आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

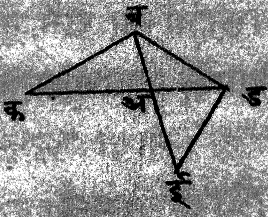
(६ बु० १ ल्या सि० प्र०) डब: बई : : अब: फई व गब: बफ : : बक: फई. डब: बई : : गब: बफ असें गृहीत आहे,

ह्याकरितां अब : फई :: बक : फई ह्या करितां (५ बु॰ ३ ऱ्या सि॰ प्र॰) अब समांतरभुज चौकोन बक समांतरभुज चौकोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

१५ सिद्धांत.

ज्या दोन समान त्रिकोणांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो त्या त्रिकोणांच्या समकोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतात. ज्या दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन दुसऱ्याच्या एका कोनाबरोबर असतो आणि त्या समकोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतात ते दोन त्रिकोण समान असतात.

अबक आणि अडई दोन समान त्रिकोण आहेत, आणि बअक कोन डअई कोनाबरोबर आहे, त्यास ह्या समान कोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे



कअ : अड : : ईअ : अब, हें सिद्ध करावयाचें.

अबक आणि अडई हे दोन त्रिकोण एकाशीं एक असे लावून ठेव, कीं कअ आणि अड ह्या दोन बाजू एका सरळ रेषेंत येतील. आतां अब आणि अई ह्या दोन बाजू एका सरळ रेषेंत आहेत, हें (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) स्पष्ट आहे. ब, ड सांध. अबक त्रिकोण अडई त्रिकोणाबरोबर आहे, व अबड एक त्रिकोण आहे, ह्याकरितां अबक : अबड : : अडई : अबड. पण (६ बु० १ ल्या सि० प्र०) अबक : अबड : : कअ : अड आणि अडई : अबड : : अई : अब ह्याकरितां (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) कअ : अड : : अई : अब, म्हणून अबक आणि अडई ह्या दोन त्रिकोणांच्या समान कोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, हें सिद्ध.

आतां अबक आणि अडई ह्या दोन त्रिकोणांच्या समकोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे कअ : अड : :

अई : अब. त्यास अबक त्रिकोण व अडई त्रिकोण हे समान आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

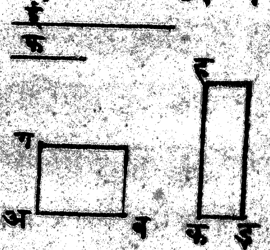
ब, ड सांध. (६ बु० १ ल्या सि० प्र०) क अ : अड : : अबक : अडब आणि अई : अब : : अडई : अडब. कअ : अड : : अई : अब असें गृहीत आहे, या करितां (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) अबक : अबड : : अडई : अबड, म्हणजे अबक आणि अडई हे दोन त्रिकोण अबड त्रिकोणाशीं समगुणोत्तरांत आहेत, म्हणून (५ बु० २ ऱ्या सि० प्र०) अबक त्रिकोण अडई त्रिकोणाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

१६ सिद्धांत. प्रमेय.

चार रेषा प्रमाणांत असल्यास आद्यंत रेषांचा काटकोन चौकोन मध्यरेषांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर असतो. आद्यंतरेषांचा काटकोन चौकोन मध्यरेषांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर असल्यास त्या चार रेषा प्रमाणांत असतात.

अब, कड, ई आणि फ ह्या चार रेषा प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अब : कड :: ई : फ, त्यास अब आणि फ ह्या दोन रेषांचा काटकोन चौकोन कड आणि ई ह्या दोन रेषांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

(१ बु० ११ व्या सि० प्र०) अ बिंदूतून अब रेषेवर अग लंब कर, आणि अग, फ रेषेबरोबर कर, तसें च कड रेषेवर क बिंदूतून कह लंब कर, आणि कह ई बरोबर कर. गब आणि हड समांतरभुजचौकोन पुरे कर.



अब : कड :: ई : फ असें गृहीत आहे, व ई रेष कह रेषेबरोबर आहे, व फ रेष अग रेषेबरोबर आहे, ह्याकरितां अब : कड :: कह : अग, तेव्हां गब आणि हड ह्या दोन समांतरभुजचौकोनांच्या समान कोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत; आणि ह्याकरितां (६ बु० १४ व्या सि० प्र०) ते समान आहेत.

गब काटकोन-चौकोन अब आणि फ ह्या दोन रेषांनीं झाला आहे, कारण अग आणि फ बरोबर आहेत, व हड काटकोन-चौकोन कड आणि ई ह्या दोन रेषांनीं झाला आहे, कारण कह, ई बरोबर आहे; ह्याकरितां अब आणि फ ह्या दोन रेषांचा काटकोन चौकोन कड आणि ई ह्या दोन रेषांच्या काटकोन-चौकोना बरोबर आहे, हें सिद्ध.

अब आणि फ ह्या दोनरेषांच्या काटकोन चौकोन कड आणि ई ह्या दोन रेषांच्या काटकोनचौकोनाबरोबरआहे; त्यास त्या रेषा प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अबः कडः : ई : फ, हें सिद्धकरावयाचें.

पूर्वीप्रमाणेंच आकृति केली आहे. अब आणि फ ह्या दोनरेषांचा काटकोनचौकोन कड आणि ई ह्या दोन रेषांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, असें ग्रहीत आहे, व गब समांतरभुज चौकोन अब आणि फ ह्या दोन रेषांनीं झाला आहे, कारण अग, फ बरोबर आहे, व हड समांतरभुजचौकोन कड आणि ई ह्या दोन

रेषांनीं झाला आहे, कारण कह, ई बरोबर आहे, ह्या करितां गब समांतरभुजचौकोन हड समांतरभुजचौकोना बरोबर आहे. ते समांतरभुज चौकोन समकोण आहेत, ह्या करितां (६ बु॰ १४ व्या सि॰ प्र॰) त्यांच्या समकोनांजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अब: कड:: कह: अग. कह, ई बरोबर आहे, व अग, फ बरोबर आहे, ह्या करितां अब: कड:: ई: फ, हें सिद्ध.

१७ सिद्धांत. प्रमेय.

तीन रेषा प्रमाणांत असल्यास आद्यंत रेषांचा काटकोन चौकोन मध्य रेषेच्या वर्गा बरोबर असतो. ज्या तीन रेषांत आद्यंत रेषांचा काटकोन चौकोन मध्यरेषेच्या वर्गा बरोबर असतो, त्या तीन रेषा परस्पर प्रमाणांत असतील.

अ, ब आणि क ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अ: ब:: ब: क, त्यास अ आणि क ह्यांचा काटकोन

चौकोन ब च्या वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

ब रेघेबरोबर ड एक रेघ काढ. अ : ब :: ब : क असें गृहीत आहे, व ड, ब बरोबर आहे, ह्याकरितां अ : ब :: ड : क; पण चार रेषा प्रमाणांत असल्यास आद्यंत रेषांचा काटकोनचौकोन मध्यरेषांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर असतो, असें ६ बु० १६ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अ × क = ब × ड, पण ड, ब बरोबर आहे, ह्याकरितां अ × क = ब^2, म्हणजे अ आणि क ह्यांचा काटकोनचौकोन ब चे वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

अ आणि क ह्या दोन रेघांचा काटकोनचौकोन ब च्या वर्गाबरोबर आहे, त्यास अ, ब आणि क ह्या तीन रेघा प्रमाणांत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

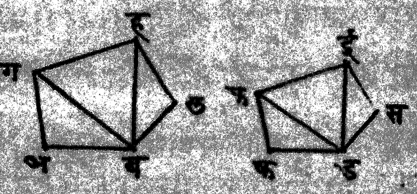
पूर्वीप्रमाणेंच ड रेघ ब रेघेबरोबर कर. अ आणि क ह्यांचा काटकोनचौकोन ब चे वर्गाबरोबर आहे असें गृहीत आहे, व ब, ड बरोबर आहे, म्हणून ब आणि ड ह्यांचा काटकोनचौकोन ब चे वर्गाबरोबर आहे, ह्याकरितां अ आणि

क ह्या दोन रेषांचा काटकोन-चौकोन ब आणि ड ह्या दोन रेषांच्या काटकोन-चौकोनाबरोबर आहे. परंतु ज्या चार रेषांत आद्यंतांचा गुणाकार मध्यरेषांचे गुणाकाराबरोबर असतो, त्या चार रेषा परस्पर प्रमाणांत असतात, ह्याकरितां अ: ब :: ड: क; ब, ड बरोबर आहे, ह्याकरितां अ: ब :: ब: क, हें सिद्ध.

१८ सिद्धांत-कृत्य.

विवक्षित सरलरेषाकृतीचीं सरूप व ती प्रमाणें स्थित अशी एक सरलरेषाकृति विवक्षित रेषेवर काढावयाची.

अब विवक्षित रेषेवर कडईफ विवक्षित चौकोनाचीं सरूप व त्याप्रमाणें स्थित असा एकचौकोन काढावयाचा.



ड, फ सांध. (१ पु॰ २२ व्या सि॰ प्र॰) अब रेषेंत अ बिंदूजवळ क कोना एवढा ब अ ग कोन कर, व ब बिंदूजवळ कडफ कोना-

एवढा अबग कोन कर. आतां (१ बु॰ ३२ व्या सि॰ प्र॰) कफड त्रिकोणाचा तिसरा कोन कफड हा अगब त्रिकोणाच्या तिसऱ्या अगब कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां कफड त्रिकोण अबग त्रिकोणाशीं समकोण आहे.

(१ बु॰ २३ व्या सि॰ प्र॰) बग रेषेंत ग बिंदूजवळ बगह कोन डफई कोनाबरोबर कर, व ब बिंदूजवळ गबह कोन फडई कोनाबरोबर कर. (१ बु॰ ३२ व्या सि॰ प्र॰) तिसरा फईड कोन तिसऱ्या गहब कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां फडई त्रिकोण गबह त्रिकोणाशीं समकोण आहे. अगब कोन कफड कोनाबरोबर आहे. व बगह कोन डफई कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां सगळा अगह कोन सगळ्या कफई कोनाबरोबर आहे, व ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं सगळा अबह कोन सगळ्या कडई कोनाबरोबर आहे, अ कोन क कोनाबरोबर आहे, व ह कोन ई कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अबहग चौकोन कडईफ चौकोनाशीं समकोण आहे. गअ ब आणि फ

कड हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, ह्याकरितां (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) अग : गब :: कफ : फड. बगह आणि डफई हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, ह्या करितां बग : गह :: डफ : फई. अग : गब :: कफ : फड व बग : गह :: डफ : फई असें आहे, ह्या करितां (५ बु० ११ व्या सि० प्र०) अग : गह :: कफ : फई. ६ व्या बुकाच्या चवथ्या सिद्धांतानें ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं अब : बह :: कड : डई व गह : हब :: फई : ईड. अबहग आणि कडईफ हे चौकोण समकोण आहेत, असें मागें सिद्ध केलें आहे व आतां त्यांच्या समकोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, असें सिद्ध केलें, ह्याकरितां (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) ते सरूप आहेत, हें सिद्ध.

आतां, कडसईफ पंचकोणाकृतीशीं सरूप व तीसारखी स्थित अशी एक पंचकोणाकृति अब रेघेवर काढावयाची.

ड, ई सांध. वर सांगितल्या प्रमाणें अब रेघेवर कडईफ चौकोनाशीं सजातीय व त्या

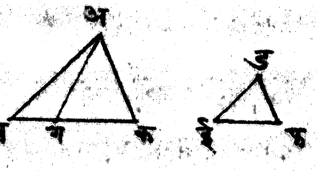
प्रमाणें स्थित असा अबहग चोकोन काढ. बह रेघेंत ब बिंदूजवळ ईडस कोनाशीं समान हबल कोन कर, आणि ह बिंदूजवळ डईस कोनाशीं समान बहल कोन कर. (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) डईस त्रिकोणाचा स कोन बहल त्रिकोणाच्या ल कोनाबरोबर आहे. अबहग आणि कडईफ ह्या आकृति सजातीय आहेत, ह्याकरितां गहब कोन फईड कोनाबरोबर आहे. बहल कोन डईस कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां सगळा गहल कोन सगळ्या फईस कोनाबरोबर आहे, व ह्याप्रमाणेंच अबल कोन कडस कोनाबरोबर आहे, म्हणून अबलहग आणि कडसईफ ह्या दोन पंचकोणाकृति समकोण आहेत. अबहग आणि कडईफ ह्या दोन आकृति सजातीय आहेत, ह्याकरितां गह: हब:: फई: ईड व बहल आणि डईस हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, ह्याकरितां (६ बु० ४थ्या सि० प्र०) बह: हल:: डई: ईस, ह्याकरितां (५ बु० ११ व्या सि० प्र०) गह: हल:: फई: ईस व ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं अब: बल:: कड: डस. हब

ल आणि ईडस हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, ह्याकरितां हल : लब :: ईस : सड. अबलहग आणि कडसईफ ह्या दोन आकृति समकोण आहेत असें पूर्वी सिद्ध केलें आहे, आणि त्यांच्या बाजू प्रमाणांत आहेत असें आतां सिद्ध केलें, ह्याकरितां ह्या दोन पंचकोणाकृति सरूप आहेत, हें सिद्ध.

१९ सिद्धांत. प्रमेय.

जे त्रिकोण सरूप असतात ते आपल्या सजातीय बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गामध्यें प्रमाणांत असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत. अबक त्रिकोणाचा ब कोन डईफ त्रिकोणाच्या ई कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अब : बक :: डई : ईफ असें आहे, म्हणून बक आणि ईफ ह्या दोन बाजू सजातीय आहेत, त्यास बक आणि ईफ



ह्या दोन बाजूंचे गुणोत्तराच्या वर्गामध्यें अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण प्रमाणांत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

(६ बु० ११ व्या सि० प्र०) बक आणि ईफ ह्या दोन बाजूंस बग तृतीय प्रमाणपद काढ. तेव्हां बकः ईफः : ईफः बग असें होईल. अ, ग सांध. अबः बकः : डईः ईफ हें चतुः प्रमाण आहे, त्यास त्याचे पदांत (५ बु० ५ व्या सि० प्र०) परावर्तन केलें असतां, अबः डईः : बकः ईफ असें होतें, परंतु बकः ईफः : ईफः बग असें आहे, म्हणून (५ बु० ४थ्या सि० प्र०) अबः डईः : ईफः बग. ह्या वरून अबग आणि डईफ ह्या त्रिकोणांच्या समान कोनांच्या आंगच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, परंतु ज्या त्रिकोणांच्या समान कोनांच्या आंगच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतात ते त्रिकोण समान असतात, असें ६ बु० १५ व्या सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अबग त्रिकोण डईफ त्रिकोणाबरोबर आहे. तीन पदें प्रमाणांत असली तर प्रथमपद आणि तिसरें पद

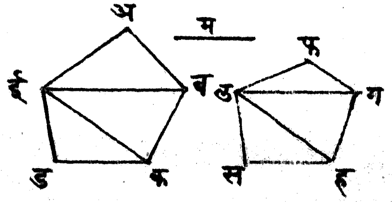
ह्यांचें गुणोत्तर प्रथमपद आणि दुसरेंपद ह्यांचे गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर असतें, आणि बक, ईफ आणि बग ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत, ह्या करितां बक आणि बग ह्यांचें गुणोत्तर बक आणि ईफ ह्यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर आहे. (६ बु॰ १ ल्या सि॰ प्र॰) बक: बग:: अबक: अबग असें आहे, म्हणून अबक आणि अबग ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर बक आणि ईफ ह्यांच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर आहे, पण अबग त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बरोबर आहे, ह्या करितां अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर बक आणि ईफ ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

कु॰ तीन रेषा प्रमाणांत असल्यास प्रथम रेषेवर कसाही त्रिकोण काढला व त्याशी सरूप व त्या सारख्या स्थित असा त्रिकोण दुसऱ्या रेषेवर काढला तर पहिल्या रेषेस जर तिसरी रेष तर पहिल्या रेषेवरील त्रिकोणास दुसऱ्या रेषेवरील त्रिकोण असें वरील सिद्धतेवरून स्पष्ट आहे.

२० सिद्धांत प्रमेय.

सरूप बहुकोणाकृतींचे सरूप त्रिकोण सारखे पडतात, आणि त्या त्रिकोणांचें गुणोत्तर बहुकोणाकृतींचे गुणोत्तराबरोबर असतें व बहुकोणाकृतींच्या सजातीय बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर बहुकोणाकृतींचें गुणोत्तर असतें.

अबकडई आणि फगहसल ह्या दोन बहुकोणाकृति सरूप आहेत, व अब बाजू फग बाजूशीं सजातीय आहे, त्यास अबकडई आणि



फगहसल ह्या दोन बहुकोणाकृतींचे सरूप त्रिकोण सारखे पडतात, व त्या त्रिकोणांचें परस्पर गुणोत्तर बहुकोणाकृतींच्या गुणोत्तराबरोबर आहे, आणि अब आणि फग ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर अबकडई आणि फगहसल ह्या बहुकोणाकृतींचें गुणोत्तर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

ब, ई   ई, क   ग, ल   ल, ह सांध. अब

कडई बहुकोणाकृति फगहसल बहुकोणाकृतीशीं सरूप आहे, ह्याकरितां (६ बु० ६ व्या व्याख्ये वरून) बअई कोन गफल कोनाबरोबर आहे, आणि बअ: अई :: गफ: फल असें आहे; आतां बअई आणि गफल ह्या दोन त्रिकोणांत अ कोन फ कोनाबरोबर आहे, आणि ह्या दोन कोनांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, ह्या करितां हे दोन त्रिकोण (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) समकोण आहेत, आणि म्हणून ते (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) सरूप आहेत, म्हणून अबई कोन फगल कोनाबरोबर आहे. ह्या बहुकोणाकृति सरूप आहेत, ह्या करितां सगळा अबक कोन सगळ्या फगह कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अर्थातच ईबक कोन लगह कोनाबरोबर आहे. अबई आणि फगल हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, ह्याकरितां ईब: बअ :: लग: गफ बहुकोणाकृति सरूप आहेत, ह्याकरितां अब: बक :: फग: गह, म्हणून (५ बु० ११ व्या सि० प्र०) ईब: बक :: लग: गह. ह्यावरून असें झालें, कीं ईबक आणि लगह ह्या दोन समान को-

नांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणून **ईबक** त्रिकोण **लगह** त्रिकोणाशीं समकोण व सरूप आहे. ह्याचरीतीनें **ईकड** त्रिकोण **लहस** त्रिकोणाशीं समकोण व सरूप आहे असें सिद्ध होतें, म्हणून **अबकडई** आणि **फगहसल** ह्या दोन सरूप आकृतींचे सरूप त्रिकोण समान पडले असत, हें सिद्ध.

आतां ह्या सर्व त्रिकोणांचें परस्परांचें गुणोत्तर बहुकोणाकृतींच्या गुणोत्तराबरोबर आहे, व **अब** आणि **फग** ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर **अबकडई** आणि **फगहसल** ह्या दोन बहुकोणाकृतींचें गुणोत्तर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

अबई आणि **फगल** हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, ह्याकरितां (६ बु॰ १९, च्या सि॰ प्र॰) **बई** आणि **गल** ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर **अबई** आणि **फगल** ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर आहे. आणि ह्याचकारणास्तव **बई** आणि **गल** यांच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर **बईक** आणि **गलह** ह्या दोन त्रिकोणांचे

गुणोत्तर आहे, म्हणून (५ बु० ४थ्या सि० प्र०) अ ब ई त्रिकोणास जर फ ग ल त्रिकोण तर ब ई क त्रिकोणास ग ल ह त्रिकोण. ई ब क आणि ल ग ह हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, ह्याकरितां ई क आणि ल ह ह्या दोन बाजूंचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर ई ब क आणि ल ग ह ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर आहे, व ई क ड आणि ल ह स हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, ह्याकरितां ई क आणि ल ह ह्या दोन बाजूंचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर ई क ड आणि ल ह स ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर आहे, म्हणून ई ब क : ल ग ह : : ई क ड : ल ह स. अ ब ई : फ ग ल : : ई ब क : ल ग ह असें सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अ ब ई : फ ग ल : : ई ब क : ल ग ह आणि ई ब क : ल ह ग : : ई क ड : ल ह स, ह्याकरितां (५ बु० १४ व्या सि० प्र०) अ ब ई त्रिकोणास जर फ ग ल त्रिकोण तर अ ब क ड ई बहुकोणाकृतीस फ ग ह स ल बहुकोणाकृति. अ ब आणि फ ग ह्या दोन सजातीय बाजूंचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर अ ब ई आणि

फगल ह्या दोन त्रिकोणांचें गुणोत्तर आहे, ह्या करितां अब आणि फग ह्या दोन बाजूंच्या गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर फगहसल आणि अबकडई ह्या दोन बहुकोणाकृतींचें गुणोत्तर आहे.

१ कु॰ आकृतीस कितीही बाजू असल्या आणि त्या आकृति जर सरूप असल्या तर त्यांचें गुणोत्तर त्या आकृतींच्या सजातीय बाजूंच्या गुणोत्तराच्या वर्गाबरोबर असतें, हें वरील रीतीनेंच सिद्ध होईल, ह्या करितां सरूप सरलरेषाकृतींचें गुणोत्तर त्यांच्या सजातीय बाजूंच्या गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर असतें असें सामान्यतः म्हटलें असतां चालेल.

२ कु॰ सजातीय बाजूं पैकीं ज्या दोन बाजू अब आणि फग ह्यांस म रेघ तृतीयपद घेतलें असतां हें स्पष्ट आहे, कीं अब आणि म ह्यांचें गुणोत्तर अब आणि फग ह्यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर आहे. परंतु अब आणि फग ह्या बाजूंवरील चतुष्कोणाकृति किंवा बहुकोणाकृति ह्यांचें गुणोत्तर अब आणि फग ह्यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर आहे, ह्या करितां अब

जर म तर अब रेघेवरील आकृतीस फग रेघेवरील आकृति. ६ बु॰ १९ व्या सि॰ कु॰ मध्यें त्रिकोणांविषयीं ही गोष्ट सिद्ध केली आहे व, ह्याकरितां ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कीं तीन रेघा प्रमाणांत असल्यास पहिले रेघेस जर तिसरी रेघ तर पहिले रेघेवरील सरलरेषाकृतीस दुसरे रेघेवरील सरूप सरलरेषाकृति.

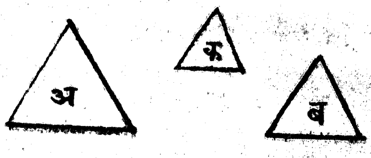
२ कु॰ सर्वचौरसें सरूप असतात, म्हणून कोणत्याही दोन चौरसांचें गुणोत्तर त्यांच्या बाजूंच्या गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर असतें, ह्याकरितां कोणत्याही दोन सरूप सरलरेषाकृति व त्यांच्या सजातीय बाजूंचे वर्गही परस्पर प्रमाणांत असतात.

२१ सिद्धांत. प्रमेय.

ज्या सरलरेषाकृति दुसऱ्या एका सरलरेषाकृतीशीं सरूप असतात त्या परस्पर सरूप असतात.

अ आणि ब ह्या सरलरेषाकृति क सरलरेषाकृतीशीं सरूप आहेत, त्यास त्या परस्पर सरूप आहेत, हे सिद्ध करावयाचें.

अ आकृति क आकृतीशीं सरूप आहे, ह्याकरितां (६ बु० ६ व्या व्या० प्र०) त्या समकोण आहेत, व त्यांच्या समकोनांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत. ब आणि क ह्या आकृति सरूप आहेत, ह्याकरितां त्याही समकोण आहेत, व त्यांच्या समकोनांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत. त्या अर्थी अ आणि ब ह्या आकृतींपैकीं प्रत्येक आकृति क आकृतीशीं समकोण आहे व त्या प्रत्येक आकृतीच्या व क आकृतीच्या समकोणांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, त्या अर्थी (५ बु० ४ थ्या मि० प्र०) अ आणि ब आकृति समकोण आहेत, व त्यांच्या समकोनांजवळच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणून अ आकृति ब आकृतीशीं सरूप आहे, हें सिद्ध.



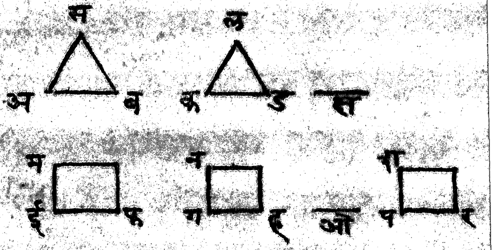
२२ सिद्धांत.प्रमेय.

ज्या चार सरळरेषा परस्पर प्रमाणांत असतात त्यांवर सजातीय रीतीनें सरूप आकृति काढल्या असतां त्या परस्पर प्रमाणांत असतात. चार

सरलरेषांवर सजातीय रीतीनें सरूप काढलेल्या
आकृति परस्पर प्रमाणांत असल्यास त्या सरलरे
ही परस्पर प्रमाणांत असतात.

अब, कड, ईफ आणि गह ह्या चा
सरलरेषा परस्पर प्रमाणांत आहेत, म्हणजे अ
ब: कड :: ईफ: गह आणि अब
आणि कड ह्या दोन रेषांवर सजातीय रीतीनें
सअब आणि लकड अशा सरूप आकृति
काढल्या आहेत, व त्या प्रमाणेंच ईफ आणि
गह ह्या दोन रेषांवर मफ आणि नह ह्या
दोन सरूप आकृति काढल्या आहेत, त्यास सअ
ब आकृतीस जर लकड तर मफ आकृतीस
नह, हें सिद्ध करावयाचें.

(६ बु० ११ व्या सि० प्र०) अब आणि
कड ह्या दोन रेषांस तृतीय पद रेषा काढ,
आणि ईफ
आणि गह
ह्या दोन रेषांस
तृतीयपद ओ
रेषा काढ.



अब: कड:: ईफ: गह असें आहे, आणि (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) कड: क्ष:: गह: ओ, म्हणून (५ बु० ११ व्या सि० प्र०) अब: क्ष:: ईफ: ओ; परंतु (६ बु० २० व्या सि० २ कुप्र०) अब: क्ष:: सअब: लकड आणि ईफ: ओ:: मफ: नह; म्हणून सअब सरलरेषाकृतीस जर लकड सरलरेषाकृति तर मफ सरलरेषाकृतीस नह सरलरेषाकृति, हें सिद्ध.

आतां सअब, लकड, मफ आणि नह ह्या चार सरलरेषाकृति परस्पर प्रमाणांत आहेत, त्यास अब: कड:: ईफ: गह, हें सिद्ध करावयाचें.

(६ बु० १२ व्या सि० प्र०) अब, कड आणि ईफ ह्या तीन रेषांस चौथें पद पर रेषा काढ, आणि (६ बु० १८ व्या सि० प्र०) मफ आकृतीशीं किंवा नह आकृतीशीं सरूप व ती प्रमाणें स्थित अशी शर सरलरेषाकृति पर रेषेवर काढ. आतां अब: कड:: ईफ: पर असें आहे, व अब आणि कड ह्या दोन रेषांवर सारख्या

स्थित व सरूप अशा सअब आणि लकड सरलरेषाकृति काढल्या आहेत, व ईफ आणि पर ह्या दोन रेषांवर, सारख्या स्थित व सरूप अशा मफ आणि शार सरलरेषाकृति काढल्या आहेत, म्हणून सअब: लकड :: मफ: शार, परंतु सअब: लकड :: मफ: नह असें गृहीत आहे, ह्याकरितां मफ आकृतीचें नह आणि शार ह्या आकृतीशीं समान गुणोत्तर आहे, ह्याकरितां (५ बु० २ या लि० ३०) नह आकृति शार आकृतीशीं समान आहे, आणि त्या आकृति सरूप व सारख्या स्थित आहेत, ह्याकरितां गह रेघ पर रेघेबरोबर आहे; अब: कड :: ईफ: पर असें आहे, आणि पर रेघ गह बरोबर आहे, म्हणून अब: कड :: ईफ: गह, हें सिद्ध.

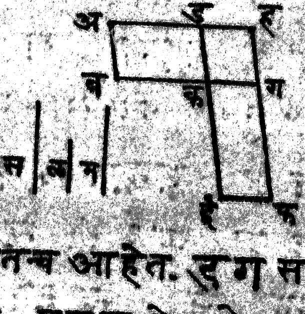
कु० ज्या चार सरलरेषा प्रमाणांत असतात त्यांवरील चौरसेंही प्रमाणांत असतात; व जीं चार चौरसें प्रमाणांत असतात त्यांच्या रेषाही प्रमाणांत असतात, कारण चौरसें सरूप असतात.

२३ सिद्धांत. प्रमेय.

समकोण समांतरभुज चौकोनांचें गुणोत्तर त्यांच्या बाजूंच्या गुणोत्तरांच्या गुणाकाराबरोबर असतें.

अक आणि **कफ** असे दोन समकोण समांतरभुज चौकोन आहेत, व **अक**चा **बकड** कोन **कफ**चे **ईकग** कोनाबरोबर आहे, त्यास **अक** आणि **कफ** ह्यांचें गुणोत्तर त्यांच्या बाजूं-च्या गुणोत्तरांचे गुणाकाराबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

बक आणि **कग** ह्या दोन बाजू एका सरलरेषेंत येतील अशा तऱ्हेनें **अक** आणि **कफ** हे समांतरभुज चौकोन जवळ ठेव; (१ बु॰ १४ व्या सि॰ प्र॰)



डक आणि **कई** ह्या दोन बाजू एका सरलरेषेंतच आहेत. **डग** समांतरभुज चौकोन पूर्ण कर. एक स रेषा घे, आणि (६ बु॰ १२ व्या सि॰ प्र॰) **बक**, **कग** आणि

स ह्या तीन रेषांस चौथें पद ल रेषा काढ, आणि ड क, क ई आणि ल ह्या तीन रेषांस चौथें पद म रेषा काढ. आतां हें स्पष्ट आहे, कीं स आणि ल ह्या रेषांचें गुणोत्तर ब क आणि क ग ह्यांचें गुणोत्तराबरोबर आहे, व ल आणि म ह्यांचें गुणोत्तर ड क आणि क ई ह्यांचे गुणोत्तराबरोबर आहे; स आणि म ह्या दोन रेषांचें गुणोत्तर स आणि ल ह्यांचें गुणोत्तर व ल आणि म ह्यांचें गुणोत्तर ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर आहे, म्हणून स आणि म ह्यांचें गुणोत्तर ब क आणि क ग ह्यांचें गुणोत्तर व ड क आणि क ई ह्यांचें गुणोत्तर ह्यांचे गुणाकाराबरोबर आहे. (६ बु० १ ल्या सि० प्र०) ब क : क ग : : अ क : क ह, परंतु ब क : क ग : : स : ल असें आहे, ह्याकरितां (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) स : ल : : अ क : क ह. ड क : क ई : : क ह : क फ, पण ड क : क ई : : ल : म असें आहे, ह्याकरितां ल : म : : क ह : क फ. स : ल : : अ क : क ह व ल : म : : क ह : क फ असें सिद्ध झालें, ह्याकरितां (५ बु० ११ व्या सि० प्र०)

स : म : : अक : कफ. स आणि म ह्या दोन रेषांचें गुणोत्तर अक आणि कफ ह्या दोन समांतर भुज चौकोनांचे बाजूंचे गुणोत्तरांचे गुणाकारा बरोबर आहे, असें सिद्ध केलें आहे, ह्याकारितां अक आणि कफ ह्यांचें गुणोत्तर त्यांच्या बाजूंच्या गुणोत्तरांच्या गुणाकाराबरोबर आहे, हें सिद्ध.

कु० दोन चतुःप्रमाणांतील पदें रेषा असल्यास त्यांच्या सरूप पदांचे काटकोन चौकोन ही प्रमाणांत असतात.

अ : ब : : कड व ई : फ : : ग : ह अशीं दोन चतुःप्रमाणें आहेत. त्यांचे सरूप पदांचे काटकोन चौकोनांस म्हणजे अ×ई, ब×फ, क×ग, आणि ड×ह ह्यांस अनुक्रमें म, न, प आणि ष अशीं नांवें देऊं. (२ बु० २१ व्या सि० प्र०) म आणि न ह्या काटकोन चौकोनांचें गुणोत्तर अ आणि ब, आणि ई आणि फ रेषांचे गुणोत्तरांचे गुणाकाराबरोबर आहे, व प आणि ष ह्या काटकोन चौकोनांचें गुणोत्तर क आणि ड व ग आणि ह ह्यांचे गुणोत्तरांचे गुणाकाराबरोबर आहे; परंतु अ आणि ब, व ई आणि फ ह्यांचीं

गुणोत्तरें क आणि ड आणि ग आणि ह यांच्या गुणोत्तरांबरोबर आहेत, ह्या करितां त्यांचे गुणाकार बरोबर आहेत, म्हणून म: न:: प: ष, हें सिद्ध.

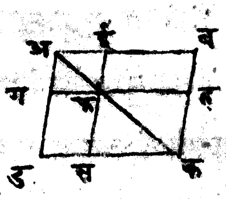
२ कु० ह्यावरील कुरलीवरून स्पष्ट आहे, कीं ज्या काटकोनचौकोनांचे पाये व उंच्याही प्रमाणांत असतात, ते परस्पर प्रमाणांत असतात.

२४ सिद्धांत. प्रमेय.

कोणत्याही समांतरभुजचौकोनांत त्याची कर्णरेषा ज्यांतून जाते असे जे समांतरभुजचौकोन पडतात ते थोरल्या समांतरभुजचौकोनाशीं सरूप असतात, व परस्परांशीं सरूप असतात.

अबकड एक समांतरभुज चौकोन आहे. त्याचा कर्ण अक आहे, आणि तो ईग आणि हस ह्या दोन समांतरभुजचौकोनांतून जातो, त्यास ते अबकड समांतरभुजचौकोनाशीं सरूप आहेत, व परस्परांशीं सरूप आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

डक आणि गफ ह्या दोन रेषा समां-



तर आहेत, आणि त्यांस अड रेघ छेदिते, ह्याकरितां (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) अडक कोन अगफ कोनाबरोबर आहे. तसेंच बक, ईफ शीं समांतर आहे, आणि त्यांस अब रेघ छेदिते, ह्याकरितां अबक कोन अईफ कोनाबरोबर आहे. (१ बु० ३४ व्या सि० प्र०) बकड कोन व ईफग कोन ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन डअब कोनाबरोबर आहे, म्हणून ते परस्पर बरोबर आहेत, ह्याकरितां अबकड आणि अईफग हे समांतरभुज चौकोन समकोण आहेत. अबक आणि अईफ ह्या दोन त्रिकोणांत अबक कोन अईफ कोनाबरोबर आहे, बअक कोन दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्याकरितां ते त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) अब : बक :: अई : ईफ. समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू बरोबर असतात, ह्याकरितां अब : अड :: अई : अग व डक : बक :: गफ : ईफ व डक : डअ :: फग : गअ.

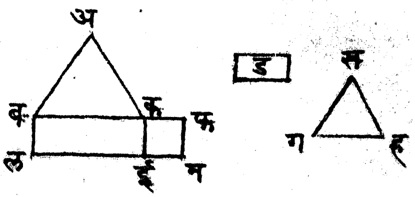
ह्या करितां अबकड आणि अईफग ह्या दोन समांतरभुजचौकोनांच्या समकोनांच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, म्हणून (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) ते परस्पर सरूप आहेत, व ह्या प्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं अबकड आणि फहकस हे दोन समांतरभुजचौकोन सरूप आहेत, तेव्हां गई आणि सह ह्यांपैकीं प्रत्येक समांतरभुजचौकोन डब समांतरभुजचौकोनाशीं सरूप आहे, व ६ बुकाच्या २१ व्या सिद्धांतांत असें सिद्ध केलें आहे, कीं ज्या आकृति दुसऱ्या एका आकृतीशीं सरूप असतात, त्या परस्पर सरूप असतात, म्हणून गई समांतरभुजचौकोन सह समांतरभुजचौकोनाशीं सरूप आहे हें सिद्ध.

२५ सिद्धांत. कृत्य.

दोन विवक्षित सरलरेषाकृतींपैकीं एका आकृतीशीं सरूप व दुसरे आकृतीशीं समान अशी एक सरलरेषाकृति काढावयाची.

अबक आणि ड अशा दोन सरलरेषाकृति आहेत, त्यास अबक शीं सरूप व डशीं समान अशी एक आकृति काढावयाची.

(१ बु॰ ४५ व्या सि॰ कु॰ प्र॰) बक रेषेवर अबक त्रिकोणाशीं समान असा बई समांतरभुजचौकोन काढ, व कई रेषेवर



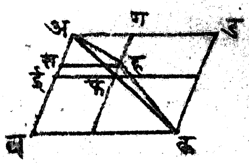
ड शीं समान व ज्याचा फकई कोन कबल कोनाशीं समान होईल, असा कम समांतरभुजचौकोन काढ. (१ बु॰ १४ व्या सि॰ प्र॰) बक आणि फक ह्या दोन बाजू एका सरलरेषेंत आहेत, व लई आणि ईम ह्या दोन बाजू (१ बु॰ २९ व्या सि॰ प्र॰) एका सरलरेषेंत आहेत. (६ बु॰ १३ व्या सि॰ प्र॰) बक आणि फक ह्यांचें मध्यपद गह रेषा काढ, आणि तीवर (६ बु॰ १८ व्या सि॰ प्र॰) अबक आकृतीशीं सरूप व ती प्रमाणें स्थित अशी एक सगह आकृति काढ. बक, गह, आणि कफ ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत, म्हणजे बक : गह :: गह : कफ, व ज्या तीन रेषा प्रमाणांत असतात, त्यांपैकीं पहिल्या रेषेवर आकृति काढून त्या आकृतिशीं सरूप व तीप्रमाणें स्थित अशी आकृति दुसरे रेषेवर काढली असतां पहिल्या रेषेस

जर तिसरी रेषा तर पहिल्या रेषेवर काढलेल्या
कृतीस दुसऱ्या रेषेवर काढलेली आकृति अ
बु० २० व्या सि० २ कुरलरींत सिद्ध केलें आहे,
णून बक : कफ :: अबक : सगह,
रंतु (६ बु० १ल्या सि० प्र०) बक : कफ
बई : ईफ, म्हणून (५ बु० ४थ्या सि० प्र०
अबक : सगह :: बई : ईफ. आ
अबक आकृति बई आकृतीशीं समान
आहे, ह्याकरितां सगह आकृति ईफ आकृ
शीं समान आहे हें स्पष्टच आहे. ईफ आकृति
आकृतीबरोबर आहे, ह्याकरितां सगह आकृ
ड आकृतीशीं समान आहे, आणि ती आकृती
बक शीं सरूप आहे, ह्याकरितां अबक
सरूप व ड शीं समान अशी सगह आकृ
काढली असे.

२६ सिद्धांत. प्रमेय.

जर दोन सरूप समांतर भुजचौकोनांस
कोन साधारण असला व ते सारखे स्थित अस
तर त्यांच्या कर्णरेषा एकाच सरळ रेषेंत असता

अबकड आणि अईफग असे दोन सरूप समांतरभुज चौकोन आहेत, व ते सारखे स्थित आहेत, आणि त्यांस डअब कोन साधारण आहे,



त्यास त्यांच्या कर्णरेषा एकाच सरळरेषेंत आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

बड आणि ईग ह्या समांतरभुज चौकोनांच्या अक आणि अफ कर्णरेषा एका रेषेंत नाहींत असें म्हटल्यास अक कर्णरेषा, अफ कर्णरेषा ज्या रेषेंत आहे तीहून भिन्न जी अहक रेषा तींत आहे, व गफ रेघ अहक रेषेला ह स्थळीं छेदिते असें मानूं. ह बिंदूंतून अड शीं किंवा बक शीं समांतर हस रेघ कर. अबकड आणि असहग ह्या दोन समांतरभुज चौकानां मधून अहक कर्णरेषा जाते, ह्याकरितां (६ बु० २४ व्या सि० प्र०) ते सरूप आहेत, म्हणून (६ बु० ६ व्या व्या० प्र०) डअ: अब:: गअ: अस. अबकड आणि अईफग समांतरभुज चौकोन सरूप आहेत, ह्याकरितां डअ: अब::

गअ: अई, म्हणून (५ बु० ४ थ्या सि० प्र०) गअ: अई :: गअ : अस. आतां अस आणि अई ह्या दोन रेघांशीं गअ रेघेचें समान गुणोत्तर आहे, ह्याकरितां (५ बु० ३ ऱ्या सि० प्र०) अस, अई बरोबर आहे; परंतु लहान रेघ मोठ्या रेघेबरोबर होणें ही गोष्ट अशक्य, ह्यास्तव अबकड समांतरभुज चौकोनाची कर्ण रेषा अहक रेघेंत नाहीं, आणि ह्याप्रमाणेंच सिद्ध करितां येईल, कीं अफ कर्णरेषा ज्या रेघेंत आहे ती शिवाय दुसरे रेघेंमध्यें अबकड चौकोनाची कर्णरेषा असणार नाहीं, ह्यास्तव अबकड आणि अईफग ह्या दोन समांतर भुज चौकोनांच्या कर्णरेषा एकाच रेघेंत आहेत.

२७ सिद्धांत. प्रमेय.

रेघेचे कसेही दोन विषम भाग पाडले तरी त्यांचा जो काटकोन चौकोन होतो, तो अर्धरेघेच्या चौरसापेक्षां लहान असतो.

अब एक सरळ रेघ आहे, तिचे क स्थळीं दोन समान भाग केले आहेत, व ड स्थळीं दोन अस-

मान भाग केले आहेत, त्यास अ ड आणि ब ड ह्यांचा काटकोनचौकोन अ क च्या चौरसापेक्षां लहान आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

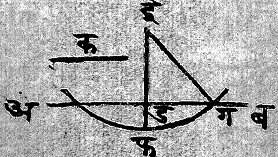
अ ब रेघेचे क स्थळीं दोन समान भाग केले आहेत, व ड स्थळीं दोन असमान भाग केले आहेत, ह्याकरितां (२ बु० ५ व्या सि० प्र०) अ ड × ब ड + क ड² = अ क². ह्यावरून स्पष्ट होतें, कीं अ क चें चौरस अ ड आणि ब ड ह्यांच्या काटकोनचौकोनापेक्षां मोठें आहे.

२८ सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित रेघेचे असे दोन खंड करावयाचे कीं त्यांचा काटकोनचौकोन विवक्षित क्षेत्राबरोबर होईल. परंतु विवक्षित क्षेत्र विवक्षित रेघेच्या अर्धाच्या वर्गापेक्षां ज्यास्त असूं नये.

अ ब विवक्षित रेघ आहे व क रेघेचें चौरस विवक्षित क्षेत्र आहे, त्यास अ ब रेघेचे असे दोन खंड करावयाचे कीं त्यांचा काटकोनचौकोन क

रेघेवरील चौरसाबरोबर होईल. क रेघेचें चौरस अब च्या अर्धा वरील चौरसापेक्षां मोठें नाहीं.



अब रेघेचे ड स्थळीं दोन समान भाग कर, अड चा वर्ग क चे वर्गाबरोबर असल्यास जें पाहिजे होतें तें झालें. अड चा वर्ग क च्या वर्गाबरोबर नसल्यास अड रेघ क पेक्षां मोठी आहे, हें प्रतिज्ञेवरून स्पष्टच आहे. अब रेघेवर डई लंब कर, आणि डई रेघ क रेघेशीं बरोबर कर. ईड रेघ फ पर्यंत वाढीव, आणि ईफ, अड बरोबर कर. नंतर ई मध्य कल्पून ईफ त्रिज्येनें वर्तुल काढ. तें अब रेघेस ग स्थळीं छेदितें असें मानूं. ई, ग सांध. अब रेघेचे समान भाग ड स्थळीं झाले आहेत, व असमान भाग ग स्थळीं झाले आहेत, ह्याकरितां (२बु० ५व्या सि० प्र०) अड^{२}=अग × गब + डग^{२} पण अड, ईफ आणि ईग ह्या रेघा बरोबर आहेत, ह्याकरितां ईग^{२}= अग × बग + डग^{२}. (१बु० ४७व्या सि० प्र०)

ईगे = ईडे + डगे, ह्याकरितां ईडे + डगे = अग × बग + डगे. डगे दोन्ही पक्ष्यांस साधारण आहे, ह्याकरितां तो काढून टाकिला असतां ईडे = अग × बग. ईड, क बरोबर आहे, ह्याकरितां के = अग × बग. तेव्हां क च्या वर्गाबरोबर ज्यांचा काटकोन चौकोन आहे, असे अग आणि गब खंड अब रेघेचे पडले असत.

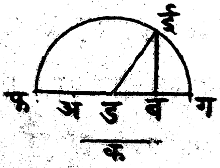
२९ सिद्धांत. प्रमेय.

विवक्षित रेषा इतकी वाढवावयाची आहे, कीं तिचे बाहेरील खंडांचा काटकोन चौकोन विवक्षित क्षेत्राबरोबर होईल.

अब विवक्षित रेघ आहे, आणि क वरचें चौरस विवक्षित क्षेत्र आहे, त्यास अब रेघ इतकी वाढवावयाची आहे, कीं तिचे बाहेरील खंडांचा काटकोन चौकोन क च्या वर्गाबरोबर होईल.

अब रेघेचे ड स्थळीं दोन समान भाग कर, अब वर बई लंब कर, आणि तो क बरोबर कर. डई सांध. ड मध्य कल्पून डई त्रि-

ज्येनें फईग वर्तुल काढ. नें वर्तुल अब बाजू वाढविली असतां तीस ग स्थळीं मिळतें.



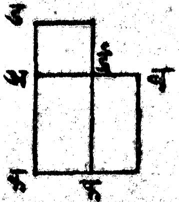
अब रेषेचे दोन समान भाग ड स्थळीं केले आहेत, व ती ग स्थलापर्यंत वाढविली आहे, ह्या करितां (२ बु॰ ६ व्या सि॰ प्र॰) $\text{डग}^2 = \text{अग} \times \text{बग} + \text{डब}^2$. डग, डई बरोबर आहे, ह्या करितां $\text{डई}^2 = \text{अग} \times \text{बग} + \text{डब}^2$ पण (१ बु॰ ४७ व्या सि॰ प्र॰) $\text{डई}^2 = \text{डब}^2 + \text{बई}^2$, म्हणून $\text{डब}^2 + \text{बई}^2 = \text{अग} \times \text{बग} + \text{डब}^2$. डब^2 दोहों पेट्यांस साधारण आहे, तो काढून टाकिला असतां $\text{बई}^2 = \text{अग} \times \text{बग}$. बई = क, म्हणून $\text{क}^2 = \text{अग} \times \text{बग}$. तेव्हां क च्या वर्गा बरोबर ज्यांचा काटकोन चौकोन आहे. असे अब चे बाहेरील भाग पडत तो पर्यंत अब रेघ वाढविली असे.

३० सिद्धांत. कृत्य.

विवक्षित रेषेचे अंत्यमध्यप्रमाणानें खंड करावयाचे.

अब ही विवक्षित रेषा आहे, तर तिचे अंत्य-मध्यप्रमाणानें खंड करावयाचे.

(१ बु० ४६ व्या सि० प्र०) अब रेषेवर बक चौरस काढ, आणि (६ बु० २९ व्या० सि० प्र०) अक रेघ ड पर्यंत वाढीव, अशी कीं अड आणि



डक त्यांचा काटकोनचौकोन अक चे वर्गा बरोबर होईल.

अई, अड बरोबर कर, आणि ड फ काटकोनचौकोन पुरा कर. हा काटकोनचौकोन कड आणि अई अथवा कड आणि अड ह्या रेषांनीं झाला आहे. कड × अड = अक², म्हणून डफ काटकोनचौकोन कब चौरसा बरोबर आहे; दोन्ही पैक्यांतून त्यांस साधारण जो अफ काटकोनचौकोन तो काढून टाकिला असतां डई बरोबर बफ होतो. बफ

काटकोनचौकोन अ ब आणि ब ई ह्या दोन रेषां-
नीं झाला आहे, कारण अ ब आणि फ ई बरो-
बर आहेत; आणि ड ई क्षेत्र अ ई च्या वर्ग आ-
हे, ह्याकरितां (६ बु० १७ व्या सि० प्र०) अ ब
आणि ब ई ह्यांचें मध्यपद अ ई आहे, म्हणजे
अ ब : अ ई :: अ ई : ब ई. अ ब अ ई
पेक्षां मोठी आहे, म्हणून अ ई, ई ब पेक्षां मोठी
आहे, हें उघड आहे. तेव्हां (६ बु० १ ल्या व्या०
प्र०) अ ब रेषेचे ई स्थळीं मध्य प्रमाणानें खंड
पाडले असत.

दुसरा प्रकार. (२ बु० ११ व्या सि० प्र०)

अ ब रेषेचे क स्थळीं असे दोन खंड कर, कीं
अ ब आणि ब क

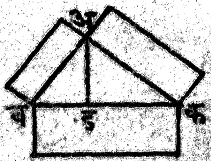
ह्यांचा काटकोनचौको
न अ क च्या वर्गाबरोबर होईल. अ ब आणि
ब क ह्यांचा काटकोनचौकोन अ क वर्गाबरोबर
आहे, ह्याकरितां (६ बु० १७ व्या सि० प्र०) अ ब,
अ क आणि ब क ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत,
म्हणजे अ ब : अ क :: अ क : ब क. तेव्हां
अ ब रेषेचे अत्यंमध्यप्रमाणानें खंड पाडले असत.

कु॰ रेघेचे अंत्यमध्य प्रमाणानें खंड पाडणें व मध्य प्रमाणानें खंड पाडणें हीं एकच होत. (२ बु॰ ६ व्या॰)

३१ सिद्धांत. प्रमेय.

काटकोन त्रिकोणांत कर्णावर सरलरेषाकृति काढली असतां ती, भुज आणि कोटि ह्यांवर त्या आकृतीशीं सरूप व तीप्रमाणें स्थित अशा सरलरेषाकृति काढल्या असतां त्यांच्या बेरजे बरोबर असते.

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे, त्यांत **अ** कोन काटकोन आहे, तर **बक** कर्णावर सरलरेषाकृति काढली असतां ती **अक** भुज व **अब** कोटि ह्यांवर त्या आकृतीशीं सजातीय व तीप्रमाणें स्थित अशा सरलरेषाकृति काढल्या असतां त्यांच्या बेरजे बरोबर होईल, हें सिद्ध करावयाचें.



अड लंब कर. **अबक** काटकोन त्रिकोणांत **अ** काटकोनापासून **अड** लंब **बक** कर्णावर केला आहे, ह्याकरितां **बअड** आणि

अकड हे त्रिकोण (६बु० ८व्या सि०प्र०) अ बक त्रिकोणाशीं सरूप आहेत व परस्पर सरूप आहेत. अबक आणि अबड हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, म्हणून (६बु० ४थ्या सि०प्र०) कबः अबः: अबः बड. कब, अब आणि बड ह्या तीन रेषा प्रमाणांत आहेत, ह्याकरितां (६बु० २०व्या सि०कु०प्र०) कब जर बड तर कब वरल्या आकृतीस अब वरील आकृति. (५बु० ६व्या सि०प्र०) व्यस्तानें बड जर बक तर अब वरले आकृतीस बक वरील आकृति. आणि ह्याचकारणास्तव डक जर बक तर अक वरल्या आकृतीस बक वरील आकृति, म्हणून बड आणि डक ह्यांच्या बेरजेस जर बक तर अब वरील आकृति व अक वरील आकृति ह्यांच्या बेरजेस बक वरील आकृति, परंतु बड आणि डक ह्यांची बेरीज बक आहे, ह्याकरितां अक आणि अब ह्या बाजूंवर काढलेल्या आकृतींची बेरीज बक वरील आकृतीबरोबर आहे, हें सिद्ध.

३२ सिद्धांत. प्रमेय.

ज्या दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत ते, त्यांच्या सजातीय बाजू परस्परांशीं समांतर होतील, अशा तऱ्हेनें एका कोनाशीं लावून ठेविले असतां, त्यांच्या तिसऱ्या बाजू एका सरळ रेषेंत येतील.

अबक आणि डकई दोन त्रिकोण आहेत. अबक त्रिकोणाच्या बअ आणि अक ह्या दोन बाजू डकई त्रिकोणाच्या कड आणि डई ह्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत,

म्हणजे बअ: अक :: कड: डई. आणि हे त्रिकोण क कोनाजवळ असे लावून ठेविले आहेत, कीं बअ बाजू कडशीं समांतर आहे व अक बाजू डई शीं समांतर आहे, तर बक आणि कई ह्या दोन बाजू एका सरळ रेषेंत येतील, हें सिद्ध करावयाचें.

अब आणि डक ह्या दोन समांतर बाजूंस

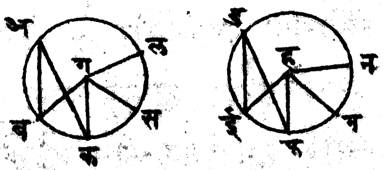
अक बाजू मिळते, ह्याकरितां (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) बअक कोन अकड कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याच कारणास्तव कडई कोन अकड कोनाबरोबर आहे, म्हणून बअक कोन कडई कोनाबरोबर आहे; आतां बअक आणि कडई ह्या दोन त्रिकोणांत अ कोन ड कोनाबरोबर आहे, आणि अ कोनाच्या बाजू अब आणि अक ह्या ड कोनाच्या आंगच्या बाजू डक आणि डई ह्यांशीं प्रमाणांत आहेत, ह्याकरितां (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) हे दोन्ही त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून अबक कोन डकई कोनाबरोबर आहे. बअक कोन अकड कोनाबरोबर आहे असें वर दाखविलें आहे, ह्याकरितां सगळा अकई कोन अ आणि ब ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबरोबर आहे. दोन्हीपैक्यांत अकब कोन मिळविला असतां अकई + अकब = अ + ब + अकब, परंतु (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) अ + ब + अकब = २ काटकोन, ह्याकरितां अकई आणि अकब हे दोन कोन मिळूनही दोन काटकोन आहेत. तेव्हां (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) बक आणि कई

ह्या दोन रेघा एका सरळ रेषेंत आहेत, हें सिद्ध.

३३ सिद्धांत प्रमेय.

समान वर्तुळांत मध्याला किंवा घेराला लागून जे कोन असतात त्यांचें गुणोत्तर ते ज्या कौंसांवर असतात त्यांच्या गुणोत्तराबरोबर असतें, व त्या कौंसांचें गुणोत्तर सेकतोरांचे गुणोत्तराबरोबर असतें.

अबक आणि डईफ हीं दोन समान वर्तुळें आहेत, त्यांत मध्या-



ला लागून बगक आणि ईहफ दोन कोन आहेत, व परिघाला लागून बअक आणि ईडफ दोन कोन आहेत, त्यास बक कौंसास जर ईफ कौंस तर बगक कोनास ईहफ कोन व बअक कोनास ईडफ कोन व बगक सेकतोरास ईहफ सेकतोर, हें सिद्ध करावयाचें.

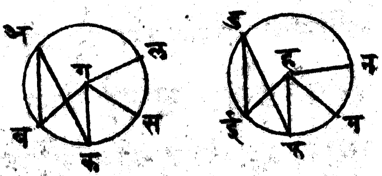
कस आणि सल हे कौंस बक कौंसा एवढे प्रत्येक कर, व ईफ कौंसा एवढे फम आणि मन कौंस कर. ग, स ग, ल ह, म ह, न सांध.

अक बाजू मिळते, ह्याकरितां (१ बु० २९ व्या सि० प्र०) बअक कोन अकड कोनाबरोबर आहे, आणि ह्याच कारणास्तव कडई कोन अकड कोनाबरोबर आहे, म्हणून बअक कोन कडई कोनाबरोबर आहे; आतां बअक आणि कडई ह्या दोन त्रिकोणांत अ कोन ड कोनाबरोबर आहे, आणि अ कोनाच्या बाजू अब आणि अक ह्या ड कोनाच्या आंगच्या बाजू डक आणि डई ह्यांशीं प्रमाणांत आहेत, ह्याकरितां (६ बु० ६ व्या सि० प्र०) हे दोन्ही त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून अबक कोन डकई कोनाबरोबर आहे. बअक कोन अकड कोनाबरोबर आहे असें वर दाखविलें आहे, ह्याकरितां सगळा अकई कोन अ आणि ब ह्या दोन कोनांच्या बेरजे बरोबर आहे. दोन्हीपैक्यांत अकब कोन मिळविला असतां अकई + अकब = अ + ब + अकब, परंतु (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) अ + ब + अकब = २ काटकोन, ह्याकरितां अकई आणि अकब हे दोन कोन मिळूनही दोन काटकोन आहेत. तेव्हां (१ बु० १४ व्या सि० प्र०) बक आणि कई

ह्या दोन रेघा एका सरल रेषेंत आहेत, हें सिद्ध.

३३ सिद्धांत. प्रमेय.

समान वर्तुळांत मध्याला किंवा घेराला लागून जे कोन असतात त्यांचें गुणोत्तर ते ज्या कौंसांवर असतात त्यांच्या गुणोत्तराबरोबर असतें, व त्या कौंसांचें गुणोत्तर सेकतोरांचे गुणोत्तराबरोबर असतें.



अबक आणि डईफ हीं दोन समान वर्तुळें आहेत, त्यांत मध्याला लागून बगक आणि ईहफ दोन कोन आहेत, व परिघाला लागून बअक आणि ईडफ दोन कोन आहेत, त्यास बक कौंसास जर ईफ कौंस तर बगक कोनास ईहफ कोन व बअक कोनास ईडफ कोन व बगक सेकतोरास ईहफ सेकतोर हें सिद्ध करावयाचें.

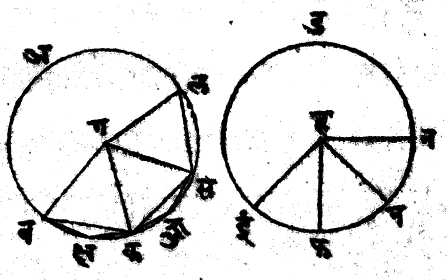
कस आणि सल हे कौंस बक कौंसा एवढे प्रत्येक कर, व ईफ कौंसा एवढे फम आणि मन कौंस कर. ग, स ग, ल ह, म ह, न सांध.

बक, कस, आणि सल हे कौंस परस्परबरोबर आहेत, ह्याकरितां (३ बु॰ २७ व्या सि॰ प्र॰) बगक कगस आणि सगल हे कोन परस्पर बरोबर आहेत, ह्याकरितां बल कौंस बक च्या जितकेपट आहे, तितकेच पट बगल कोन बगक कोनाच्या आहे. ईन कौंस ईफ कौंसाच्या जितकेपट आहे तितकेपट ईहन कोन ईहफ कोनाच्या आहे, हें वरील प्रमाणेंच सिद्ध होतें. बल कौंस ईन कौंसाबरोबर असल्यास बगल कोन ईहन कोनाबरोबर होईल. बल कौंस ईन कौंसापेक्षां मोठा असल्यास बगल कोन ईहन कोनापेक्षां मोठा होईल. बल कौंस ईन कौंसापेक्षां लहान असल्यास बगल कोन ईहन कोनापेक्षां लहान होईल. बक आणि ईफ दोन कौंस व बगक आणि ईहफ दोनकोन अशीं चारपदें आहेत. बक कौंस व बगक कोन ह्यांचीं समव्यापकें बल कौंस व बगल कोन हीं घेतलीं आहेत. तसेंच ईफ कौंस व ईहफ कोन ह्यांचीं समव्यापकें ईन कौंस व ईहन कोन हीं घेतलीं आहेत, आणि हें सिद्ध केलें आहे, कीं बल कौंस ईन कौंसापेक्षां मोठा असल्यास बगल कोन

ईहन कोनापेक्षां मोठा होईल, बरोबर असल्यास बरोबर होईल, व लहान असल्यास लहान होईल, ह्या करितां (५ बु॰ ५ व्या व्या॰ प्र॰) बक कोंसास जर ईफ कोंस तर बगक कोनास ईहफ कोन, व (३ बु॰ २० व्या सि॰ प्र॰) बगक कोन अबक कोनाच्या दुप्पट आहे, व ईहफ कोन ईडफ कोनाच्या दुप्पट आहे, ह्याकरितां बक : ईफ :: बअक : ईडफ.

आतां, बक कोंसास जर ईफ कोंस तर बगक सेकतोरास ईहफ सेकतोर, हें सिद्ध करावयाचें.

ब, क क, स सांध. बक आणि कस ह्या दोन कोंसांत क्ष आणि ओ हे दोन बिंदु घे आणि ब, क्ष क्ष, क क, ओ ओ, स बिंदु सांध. गबक आणि गकस ह्या दोन त्रिकोणांत बग आणि गक ह्या दोन बाजू कग आणि गस ह्या दोन बाजूं बरोबर आहेत, आणि त्यांच्या मधील कोन सारखे आहेत, ह्याकरितां (१ बु॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰) बक पाया कस पाया बरोबर आहे, आणि गबक त्रिकोण गकस त्रिकोणाबरोबर आहे. बक कोंस



कस कोंनाबरोबर आहे, ह्या कारितां ब अक आणि कअस हे ही कोंस बरोबर आहेत, म्हणून बक्षक कोन कओस कोनाबरोबर आहे, म्हणून बक्षक वर्तुळखंड कओस वर्तुळखंडाशीं सरूप आहे, आणि हे दोन्ही वर्तुळखंड समानरेषांवर आहेत जे सरूप वर्तुळखंड समानरेषांवर असतात ते परस्पर बरोबर असतात, असें ३ पु० २४ व्या सिद्धांतांत सांगितलें आहे, ह्याकरितां बक्षक खंड कओस खंडाबरोबर आहे. बगक त्रिकोण कगस त्रिकोणाबरोबर आहे, असें सिद्ध केलेंच आहे, ह्या कारितां बगक सेकतोर कगस सेकतोराबरोबर आहे. आणि ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें, कीं सगल सेकतोर बगक आणि कगस सेकतोरांबरोबर प्रत्येकीं आहे, व ईहफ, फहम आणि महन हे सेकतोर परस्परबरोबर आहेत; म्हणून बल कोंस बक कोंसाच्या जितकेपट आहे तितकेपट बगल सेकतोर बगक सेकतोराच्या आहे, तसेंच ईन

कोंस ई फ कोंसाच्या जितकेपट आहे तितकेचपट ई ह न सेकतोर ई ह फ सेकतोराच्या आहे. बल कोंस ई न कोंसाबरोबर असल्यास ब ग ल सेकतोर ई ह न सेकतोराबरोबर होईल. बल कोंस ई न कोंसापेक्षां मोठा असल्यास ब ग ल सेकतोर ई ह न सेकतोरापेक्षां मोठा होईल, आणि लहानअसल्यास लहान होईल. आतां ब क आणि ई फ कोंस व ब ग क आणि ई ह फ सेकतोर अशीं चार पदें आहेत, आणि ब क कोंस व ब ग क सेकतोर ह्यांचीं समव्यापकें बल कोंस व ब ग ल सेकतोर हीं घेतलीं आहेत, तसेंच ई फ कोंस व ई ह फ सेकतोर ह्यांचीं समव्यापकें ई न कोंस व ई ह न सेकतोर हीं घेतलीं आहेत, आणि हें सिद्ध केलें आहे, कीं बल कोंस ई न कोंसापेक्षां मोठा असल्यास ब ग ल सेकतोर ई ह न सेकतोरापेक्षां मोठा होईल, बरोबर असल्यास बरोबर होईल व लहान असल्यास लहान होईल, ह्याकरितां (५ बु० ५ व्या व्या० स०) ब क कोंसास जर ई फ कोंस तर ब ग क सेकतोरास ई ह फ सेकतोर.

१ कु० एक्याच वर्तुळाचे किंवा समान वर्तुळांचे

सरूप सेकतीर समान असतात.

२ कु॰ वर्तुळमध्याजवळच्या कोनास जर चार काटकोन तर तो कोन ज्या कौंसावर आहे त्या कौंसास वर्तुळाचा परिघ. कारण वर्तुळमध्यासीं जो कोन होतो त्यास जर एक काटकोन तर त्या प्रथमकोनासमोरच्या कौंसास वर्तुळपाद. याकरितां वर्तुळमध्याजवळच्या कोनास जर चार काटकोन तर त्याच्या समोरच्या कौंसास वर्तुळाचा सर्व परिघ होईल.

ब सिद्धांत. प्रमेय.

जी रेघ त्रिकोणाच्या शिरकोनाचे दोन समान भाग करते व पायास छेदते तिचा वर्ग आणि पायाच्या दोन खंडांचा काटकोन चौकोन हीं दुसऱ्या दोन बाजूंच्या गुणाकाराबरोबर असतात.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याच्या बअक शिरकोनाचे अड रेघ दोन समान भाग करते व ती बक पायास ड स्थळीं छेदिते, त्यास अडं + बड × कड = अब × अक, हें सिद्ध करावयाचें. अबक त्रिकोणा-

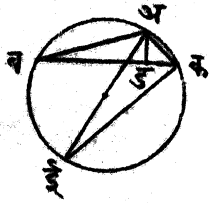
सभोंवतीं (४ बु० ५ व्या सि० प्र०) अबईक वर्तुळ काढ, अड बाजू ई पर्यंत वाढीव, आणि क, ई सांध.

बअड कोन डअक कोनाबरोबर आहे, आणि (३ बु० २१ व्या सि० प्र०) अबड कोन अईक कोनाबरोबर आहे, तेव्हां अबड त्रिकोणाचा अडब कोन अईक त्रिकोणाच्या अकई कोनाबरोबर आहे, म्हणून अबड आणि अईक हे त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) बअ : अड :: ईअ : अक, ह्याकरितां (६ बु० १६ व्या सि० प्र०) बअ × अक = अड × ईअ. पण अड आणि ईअ ह्यांचा काटकोनचौकोन (२ बु० ३ ऱ्या सि० प्र०) अड आणि डई ह्यांचा काटकोनचौकोन व अड चा वर्ग ह्यांबरोबर आहे, त्यास बअ × अक = अड × डई + अड². (३ बु० ३५ व्या सि० प्र०) अड × डई = बड × डक, ह्याकरितां बअ × अक = बड × डक + अड², हें सिद्ध.

क सिद्धांत.प्रमेय.

त्रिकोणाच्या शिरकोनापासून पायावर लंब केला असतां तो लंब आणि त्रिकोणाच्या सभोंवतीं काढलेल्या वर्तुळाचा व्यास ह्यांचा काटकोनचौकोन दुसऱ्या दोन बाजूंचे काटकोनचौकोनाबरोबर असतो.

अबक एक त्रिकोण आहे, त्याचे अ शिरकोनापासून बक पायावर अड लंब केला आहे, आणि अबक त्रिकोणा सभोंवतीं अबईक वर्तुळ काढलें आहे, त्याचा व्यास अई आहे, त्यास अई × अड = अब × अक, हें सिद्ध करावयाचें.

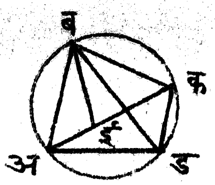


ई, क सांध. अकई कोन अर्धवर्तुळांतला आहे, ह्याकरितां तो (३ बु० ३१ व्या सि० प्र०) काटकोन आहे, म्हणून बडअ काटकोन अकई कोनाबरोबर आहे, आणि (३ बु० २१ व्या सि० प्र०) अबक कोन अईक कोनाबरोबर आहे, ह्याकरितां अबड आणि अकई त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) बअ: अड::

ई अ : अ क, म्हणून (६ बु० १६ व्या सि० प्र०) ब अ × अ क काटकोन चौकोन ई अ × अ ड काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

ड सिद्धांत-प्रमेय.

वर्तुळांतील चौकोनाच्या कर्णरेघांचा काटकोन-चौकोन त्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजूंच्या काटकोन चौकोनांच्या बेरजे बरोबर असतो.



अ ब क ड चौकोन वर्तुळाच्या आंत त्यास लागून काढला आहे, आणि अ क आणि ब ड हे त्याचे कर्ण आहेत; त्यास अ क आणि ब ड ह्या कर्णांचा काटकोन चौकोन अ ड आणि ब क ह्यांचा काटकोन चौकोन व अ ब आणि ड क ह्यांचा काटकोन चौकोन ह्यांच्या बेरजेबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

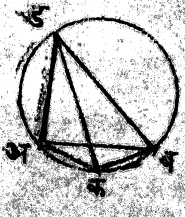
अ ब ई कोन ड ब क कोनाबरोबर कर, आणि त्या दोन्ही कोनांत प्रत्येकीं ई ब ड कोन मिळीव. तेव्हां अ ब ड कोन ई ब क कोना बरोबर

झाला. बडअ आणि बकअ हे दोन कोन अब कौंसावर आहेत, ह्याकरितां (३ बु० २१ व्या सि० प्र०) ते परस्पर बरोबर आहेत, म्हणून अबड आणि कबई त्रिकोण समकोण आहेत, म्हणून (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) बक : कई :: बड : अड, आणि म्हणून (६ बु० १६ व्या सि० प्र०) बक × अड = कई × बड. अबई कोन डबक कोना बरोबर केला आहे, व बअक कोन बडक कोना बरोबर आहे, कारण ते एका कौंसावर आहेत, म्हणून अबई आणि डबक हे दोन त्रिकोण समकोण आहेत, ह्याकरितां अब : अई :: बड : डक, म्हणून अब × डक = अई × बड. बक × अड = कई × बड आणि अब × डक = अई × बड ह्या दोन समीकरणांची बेरीज घेतली असतां बक × अड + अब × डक = कई × बड + अई × बड, पण कई × बड + अई × बड = अक × बड, ह्याकरितां अक × बड = बक × अड + अब × डक.

ई सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुलखंडाचे दोन समान भाग करून छेदन बिंदूपासून व वर्तुलखंडाच्या पायाच्या दोन टोकांपासून वर्तुळाच्या परिघामध्यें कोणत्याही बिंदूपर्यंत रेघा केल्या असतां, पायाच्या टोकांपासून काढलेल्या दोन रेघांची बेरीज आणि छेदनबिंदूपासून काढलेली रेघ, ह्यांचें गुणोत्तर वर्तुलखंडाचा पाया व वर्तुलखंडाच्या अर्धाचा पाया ह्यांचे गुणोत्तराबरोबर असतें.

अबड एक वर्तुळ आहे, त्याचा अब हा खंड आहे, आणि त्याचे क स्थळीं दोन समान भाग केले आहेत. अ, क, ब ह्या तीन बिंदूंपासून परिघांतील ड बिंदूपर्यंत अड, कड आणि बड रेघा काढल्या आहेत, त्यास अड + बड आणि कड ह्यांचें गुणोत्तर अब आणि अक ह्यांचे गुणोत्तराबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.



अकबड हा वर्तुळामध्यें सल्लग्न चोकोन

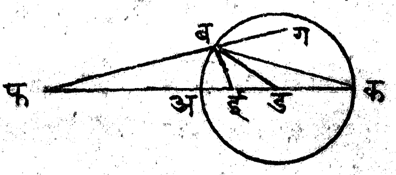
आहे, व त्याच्या अब आणि डक कर्णरेषा आहेत, त्यास (६ बु० ड सि० प्र०) अड × बक + डब × अक = अब × कड; परंतु अड × बक काटकोनचौकोन अड × अक काटकोनचौकोनाबरोबर आहे. कारण बक आणि अक बरोबर आहेत. तेव्हां अड × अक + बड × अक = अब × कड. (२ बु० १ ल्या सि० प्र०) अड × अक + बड × अक = (अड + बड) × अक, म्हणून अड आणि बड ह्या दोन रेघांची बेरीज आणि अक रेघ ह्यांचा काटकोनचौकोन अब आणि डक ह्यांचे काटकोनचौकोनाबरोबर आहे. समान काटकोनचौकोनांच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतात, असें ६ बु० १४ सिद्धांतांत सिद्ध केलें आहे, ह्याकरितां अड + डब : डक :: अब : अक, हें सिद्ध.

फ सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाच्या व्यासांत असे दोन बिंदु घेतले कीं ते दोन बिंदु आणि वर्तुलमध्यबिंदु ह्यांच्यामध्यें

जे व्यासाचे खंड पडतील त्यांचा काटकोन चौकोन अर्धव्यासाच्या वर्गाबरोबर होईल, आणि त्या दोन बिंदूपासून वर्तुलपरिघांतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत रेघा काढल्या तर त्यांचें गुणोत्तर पूर्वोक्त दोन बिंदू व परिघ ह्यांच्यामध्यें जे व्यासाचे खंड सांपडतात त्यांच्या गुणोत्तराबरोबर होतें.

अबक एक वर्तुळ आहे, आणि ड त्याचा मध्य आहे. कअ व्यास वाढवून त्यांत ई आणि फ हे बिंदु असे घेतले आहेत, कीं ईड आणि डफ ह्यांचा काटकोन चौकोन अड चे वर्गाबरोबर आहे, व परिघांतील ब बिंदूपर्यंत फ आणि ई ह्या बिंदूपासून फब आणि ईब रेघा केल्या आहेत, त्यास बफ: बई : : फअ : अई, हें सिद्ध करावयाचें.



ब, ड सांध. फड आणि डई ह्यांचा काटकोन चौकोन अडचे वर्गाबरोबर आहे, आणि अड बड बरोबर आहे, त्यास (६ बु॰ १७ व्या

सि॰ प्र॰) फड : बड :: बड : डई. फडब आणि ईडब ह्या दोन त्रिकोणांच्या साधारण कोनाच्या आंगच्या बाजू प्रमाणांत आहेत, ह्याकरितां ते (६ बु॰ ६ व्या सि॰ प्र॰) समकोण आहेत, म्हणून डईब कोन फबड कोनाबरोबर आहे, व डबई कोन डफब कोनाबरोबर आहे, म्हणून (६ बु॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰) फब : बड :: बई : ईड. (५ बु॰ ५ व्या सि॰ प्र॰) परावर्तनानें फब : बई :: बड : ईड. बड अड बरोबर आहे, ह्याकरितां फब : बई :: अड : ईड. फड : अड :: अड : डई, हें चतुः प्रमाण (५ बु॰ ८ व्या सि॰ प्र॰) फअ : अड :: अई : डई असें होतें, आणि परावर्तनानें फअ : अई :: अड : डई. फब : बई :: अड : डई. असें वर सिद्ध केलें आहे, ह्या करितां (५ बु॰ ४ थ्या सि॰ प्र॰) फब : बई :: फअ : अई, हें सिद्ध.

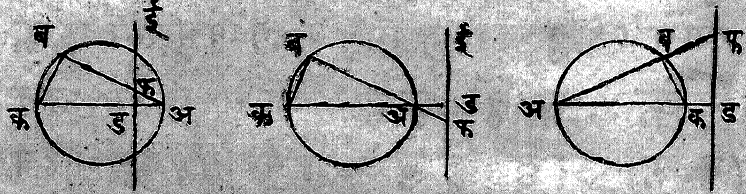
१ कु॰ फब : बई :: फअ : अई असें चतुः प्रमाण आहे, त्यास अब रेघ सांधली असतां ती फबई कोनाचे दोन समान भाग करिते,

हें (६ बु० २ ्या सि० प्र०) स्पष्ट आहे. फड : डक :: डक : डई असें चतुःप्रमाण आहे, त्यास (५ बु० ७ व्या सि० व०) मिश्रणानें फक : डक :: कई : ईड. आणि फअ : अड (डक) :: अई : ईड असें वर सिद्ध केलें आहेच, ह्याकरितां साम्यानें फअ : अई :: फक : कई, परंतु फब : बई :: फअ : अई असें चतुःप्रमाण आहे, ह्याकरितां फब : बई :: फक : कई. तेव्हां फब रेघ ग पर्यंत वाढविली आणि बक रेघ सांधली तर ई ब ग कोनाचे कब रेघ दोन समानभाग करील, हें ६ बु० अ सिद्धांतावरून स्पष्ट आहे.

ग सिद्धांत. प्रमेय.

वर्तुळाच्या व्यासाच्या एका टोंकापासून ज्या केली आणि ती ज्या व व्यास ह्यांस आंतल्या आंगानें किंवा बाहेरल्या आंगानें छेदणारा असा एक लंब व्यासावर केला तर व्यास व त्याच्या ज्या टोंकापासून ज्या केली आहे, त्याच्या आंगचा व्यासाचा तुकडा ह्यांचा काटकोन चौकोन ज्या आणि तिचा अनुरूप खंड

ह्यांच्या काटकोनचौकोनाबरोबर होतो.



अबक एक वर्तुळ आहे, आणि त्याचा व्यास अक आहे, त्या व्यासाचे अ टोंकापासून अब ज्या केली आहे, आणि त्या व्यासावर डई लंब केला आहे, तो अब ज्येस फ स्थळीं छेदितो, त्यास अब×अफ काटकोनचौकोन कअ× अड काटकोनचौकोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

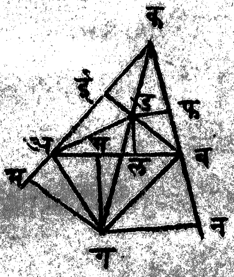
ब,क सांध. अबक कोन अर्धवर्तुळांत आहे, ह्याकरितां (३ बु० ३१ व्या सि० प्र०) तो काटकोन आहे, व अडफ कोन काटकोन आहे, आणि ब अक कोन बअक आणि फअड ह्या दोन त्रि-कोणांस साधारण आहे, ह्याकरितां ते समकोण आ-हेत, म्हणून (६ बु० ४ थ्या सि० प्र०) बअ:अक:: अड: अफ, म्हणून (६ बु० १६ व्या सि० प्र०)

बअ × अफ काटकोन चौकोन अक × अड काटकोन चौकोनाबरोबर आहे, हें सिद्ध.

ह सिद्धांत. प्रमेय.

त्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांचे दोन समान भाग करणाऱ्या रेघा ज्या बिंदूंत मिळतात तो बिंदु, व दोन बाजू वाढविल्या असतां पायाच्या बाहेरील आंगास जे कोन पडतात, त्यांचे दोन समान भाग करणाऱ्या रेघा ज्या बिंदूत मिळतात तो बिंदु व शिरोबिंदु हे तिन्ही बिंदु एका सरल रेषेंत येतात, आणि ती सरलरेषा शिरकोनाचे दोन समान भाग करते.

अबक एक त्रिकोण आहे. त्याच्या पायाकडील कोनांचे अड आणि बड रेघा दोन समान भाग करितात, आणि त्या ड बिंदूंत मिळतात, व मअब आणि अबन ह्या दोन पायांच्या बाहेरच्या आंगच्या कोनांचे अग आणि बग रेघा दोन समान भाग करतात, आणि त्या ग बिंदूंत मिळतात, तर



ग बिंदु ड बिंदु आणि क शिरोबिंदु हे तिन्ही एका सरलरेषेंत आहेत, व ती रेषा अ क ब शिरकोनाचे दोन समानभाग करते, हें सिद्ध करावयाचें.

ड ई, ड फ, ड ल, ग म, ग स, आणि ग न लंबकर. अ ड ई आणि अ ड ल ह्या दोन त्रिकोणांत ई अ ड कोन ड अ ल कोनाबरोबर आहे, ई काटकोन ल काटकोनाबरोबर आहे, व अ ड बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे, ह्याकरितां (१ बु० २६ व्या सि० प्र०) अ ल बाजू अ ई बाजूबरोबर आहे, आणि ड ल बाजू ड ई बाजूबरोबर आहे. ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होईल, कीं ब ल बाजू ब फ बाजूबरोबर आहे, ड ल बाजू ड फ बाजूबरोबर आहे, अ म अ स बरोबर आहे, ग म ग स बरोबर आहे, ब न ब स बरोबर आहे, आणि ग न, ग स बरोबर आहे. ड ई, ड ल बरोबर आहे, व ड फ ड ल बरोबर आहे, ह्यास्तव ड ई ड फ बरोबर आहे, व ह्याप्रमाणेंच सिद्ध होतें कीं ग म ग न बरोबर आहे. क ई ड आणि क फ ड ह्या दोन त्रिकोणांत ड ई बाजू ड फ बाजूबरोबर आहे, ड क बाजू साधारण आहे, आणि

कईड आणि कफड हे कोन काटकोन आहेत, ह्याकरितां (१ बु० क सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप, म्हणून क कोनाचे कड रेषेनें दोन समान भाग झाले असत. कमग आणि कगन हे दोन त्रिकोणही (१ बु० क सि० प्र०) एकरूप आहेत, ह्याकरितां क कोनाचे कग रेषेनें दोन समान भाग होतात. आतां क कोनाचे दोन समान भाग कड रेषेनें होतात, व त्याचेच दोन समान भाग कग रेषेनें होतात, ह्याकरितां कग आणि कड ह्या दोन रेषा एकमेकांशीं जमतात.

कु० कअब त्रिकोणाच्या कअ आणि कब ह्या दोन बाजूंचे गम आणि गन ह्या दोन लंबांनीं जे कम आणि कन बाह्य खंड पडले आहेत, त्यांपैकीं प्रत्येक कअब त्रिकोणाच्या बाजूंच्या परिमितीच्या अर्धाबरोबर आहे, व क शिरोबिंदूजवळच्या कई आणि कफ ह्या दोन खंडांपैकीं प्रत्येक खंड त्रिकोणाच्या बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व पाया ह्यांचे वजाबाकीबरोबर आहे, व कअ बाजूचा पायाजवळचा अई खंड

बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व कब बाजू ह्यांचे वजाबाकी बरोबर आहे, व कब बाजूच्या पायाकडचा बफ खंड बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व कअ बाजू ह्यांच्या वजाबाकीबरोबर आहे.

बाजूंच्या परिमितीचे अर्धाबरोबर ह मानूं. अस = अम आणि बस = बन, ह्याकरितां कम + कन = बाजूंची परिमिती, परंतु कम = कन म्हणून कम आणि कन ह्यांपैकीं प्रत्येकी बरोबर ह आहे, म्हणून अम = ह - अक. २ कई + २ अई + २ अम = बाजूंची परिमिति = २ कफ + २ अल + २ बल. कई = कफ आणि अई = अल ह्याकरितां २ अम = २ बल, म्हणून अम म्हणजे अस = बल. दोन्ही पेल्यांत सल मिळीव, तेव्हां अल = बस. अम = बल व अई = अल, म्हणून मई = अब, म्हणून कई = ह - अब. अई = अल आणि अल = बस आणि बस = बन म्हणून अई = ह - बक = अम = अस = बल = बफ आणि अम = ह - अक, ह्याकरितां बफ = ह - अक.

ल सिद्धांत-प्रमेय.

त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ, बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व तें अर्ध आणि पाया ह्यांची वजाबाकी ह्यांचा काटकोनचौकोन व बाजूंच्या परिमितीचें अर्ध व इतर दोन बाजू, ह्यांच्या वजाबाक्यांचा काटकोनचौकोन ह्या दोन काटकोनचौकोनांचें मध्यप्रमाण आहे.

(ह सिद्धांताची आकृति पहा) अबक त्रिकोण कम × कई आणि अम × अई ह्या दोन काटकोनचौकोनांचें म्हणजे ह × (ह - अब) आणि (ह - अक) × (ह - बक) ह्यांचें मध्यप्रमाण आहे, हें सिद्ध करावयाचें.

(१ बु॰ २९ व्या सि॰ प्र॰) ईड रेघ मगशीं समांतर आहे, म्हणून कई : ईड :: कम : मग. आतां कम : कम :: ईड : ईड, म्हणून (६ बु॰ २३ व्या॰ सि॰ कु॰ प्र॰) कई × कम : ईड × कम :: कम × ईड : मग × ईड. अबक त्रिकोण अडक, अडब आणि कडब ह्या तीन त्रिकोणांच्या बेरजे बरो-

बर आहे. (१ बु० ४१ व्या सि० प्र०) अडक, अडब आणि कडब हे तीन त्रिकोण अक × डई, अब × डल आणि बक × डफ ह्या तीन काटकोनचौकोनांच्या अर्धांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, परंतु हीं सर्व अर्धे मिळून ईड × कम काटकोनचौकोनांबरोबर आहेत, ह्याकरितां अबक = ईड × कम. ईअल आणि मअस हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबरोबर आहेत, ह्याकरितां ईअड आणि मअग हे दोन कोन मिळून एक काटकोनाबरोबर आहेत. (१ बु० ३२ व्या सि० प्र०) अगम + मअग = एक काटकोन, ह्याकरितां ईअड + मअग = अगम + मअग, म्हणून ईअड = अगम; ई आणि म ह्या बिंदूजवळचे कोन काटकोन आहेत, ह्याकरितां अगम आणि ईअड हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, म्हणून अई : ईड :: अग : अम, ह्याकरितां अई × अम = ईड × मग, ह्याकरितां पूर्वी सांगितलेलें चतुः प्रमाण कम × कई : अबक :: अबक : अग × अई असें मानल्यास चिंता नाहीं, म्हणून

ह (ह - अब) : अबक :: अबक : (ह - अक) (ह - बक)

कु॰ अ, ब, क कोनांसमोरच्या बाजूंस ष, घ, म हीं नांवें दिलीं असतां ग (ग - क) : अबक :: अबक : (ग - ष) (ग - घ)

टीप त्रिकोणाच्या तीन बाजू कळल्या असतां त्याचें क्षेत्रफल कसें काढावें ह्या विषयीं रीत ह्या सिद्धांतापासून निघते.

६ बुकाचे प्रश्न.

१ कोणत्याही तीन समांतर रेषांस ज्या रेषा मिळ-नात त्यांचे खंड प्रमाणांत पडतात.

२ एका रेषेचे तीन खंड असे पाडले आहेत, कीं सगळी रेघ व मधला खंड ह्यांचा काटकोन चौकोन आद्यंत खंडांच्या काटकोन चौकोनाबरोबर होतो, तर त्या रेघे-चे ते खंड गायन प्रमाणांत पडले आहेत, हें सिद्ध करावयाचें.

३ वर्तुळाच्या परिघांत एक बिंदु घेऊन त्यापासून त्रिज्येवर एक लंब केला व त्याच बिंदूपासून त्रिज्या वाढविली असतां तिला मिळणारी अशी एक स्पर्श-रेषा केली तर लंब आणि स्पर्शरेषाही त्रिज्येस ज्या बिंदूंत मिळतात, ते बिंदु व मध्यबिंदु ह्यांच्यामध्यें त्रि-ज्येचे जे दोन खंड पडतात त्यांचे मध्यपद त्रिज्या आहे.

४ भिन्नवर्तुलांचे कोंस एका ज्येवर असले आणि त्या ज्येचे एकाटोंकापासून निरनिराळ्या दिशांस रेषा के-ल्या तर त्या रेघा कोंसांचे खंड प्रमाणांत पाडतात.

५ विवक्षित रेषेचे गायन प्रमाणांत खंड पाडावयाचे.

६ दोन रेषा सांगितल्या आहेत, त्यास तिसरी अशी एक रेषा काढावयाची आहे, कीं सांगितलेल्या रेषांपैकीं पहिल्या रेषेस जर दुसरी रेषा तर पहिल्या रेषेवरील चौरसास जी रेषा काढावयाची ती वरील चौरस असें होईल.

७ दोन रेषा सांगितल्या आहेत, त्यास तिसरी अशी एक रेषा काढावयाची आहे, कीं सांगितलेल्या रेषांपैकीं पहिल्या रेषेस जर जी रेषा काढावयाची ती तर पहिल्या रेषेवरील चौरसास दुसरे रेषेवरील चौरस असें होईल.

८ सांगितलेले कोनाचा असा एक त्रिकोण पाडावयाचा आहे, कीं तो सांगितलेले क्षेत्राबरोबर होईल.

९ सांगितलेले त्रिकोणाचा त्याशीं सरूप असा एक त्रिकोण पाडावयाचा आहे, कीं तो सांगितलेले त्रिकोणाशीं सांगितलेले प्रमाणांत होईल.

१० वर्तुलांत सांगितलेले बिंदूतून अशी ज्या काढावयाची, कीं तिचे खंड सांगितलेले प्रमाणांत

पडतील.

११ त्रिकोणाचा पाया, उंची व त्याच्या दुसऱ्या दोन बाजूंचें गुणोत्तर हीं सांगितलीं आहेत, त्यास तो त्रिकोण करावयाचा.

१२ त्रिकोणाच्या पायाच्या टोंकांपासून समोरील बाजूंवर त्यांचे दोन समानखंड करतील अशा रेषा काढल्या असतां त्या परस्परांस दोहोंस एक ह्या प्रमाणांत छेदितात.

१३ त्रिकोणाच्या पायाची दुसऱ्या दोन बाजूंस मिळेल अशी एक समांतर रेषा काढून तिचीं व पायाचीं व्युत्क्रम टोकें सांधलीं असतां त्या सांधणाऱ्या रेषा ज्या बिंदूंत परस्परांस छेदितात तो बिंदु व शिरोबिंदु ह्यांस सांधणारी रेघ पायाचे दोन समानभाग करते व तिचे खंड गायन प्रमाणांत पडतात.

१४ वर्तुलाच्या दोन ज्यांनीं परस्परांस आंत छेदिलें असतां जो कोन होतो त्याचें माप त्या ज्यांच्या अंतर कोंसांचे बेरजेचे अर्धाबरोबर असतें, आणि ज्यांनीं परस्परांस बाहेरचे अंगास छेदिलें असतां जो कोन पडतो त्याचें माप त्या ज्यांच्या अंतर कोंसांच्या

वजाबाकीचे अर्धाबरोबर असतें.

१५ तीन रेषा अखंड प्रमाणांत असल्या तर पहिल्या रेषेस जर दुसरी रेषा तर पहिली आणि दुसरी ह्यांच्या वजाबाकीचे वर्गास दुसरी आणि तिसरी ह्यांचे वजाबाकीचा वर्ग.

१६ त्रिकोणाच्या शिरकोनाजवळच्या कोनाचे दोन समान भाग करणारी अशी रेषा पाया वाढवून त्यास मिळे तों पर्यंत वाढविली असतां त्या रेषेचें चौरस आणि पायाचे बाह्यखंडांचा काटकोन चौकोन ह्यांची वजाबाकी त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या काटकोन चौकोनाबरोबर असते.

टीप ६ बु० ब सिद्धांताचाच ह्या एक प्रकार होय.

१७ वर्तुलाच्या बाहेरचे अंगास एक बिंदु घेऊन त्यापासून वर्तुलास दोन स्पर्शरेषा केल्या व एक छेदनरेषा केली आणि स्पर्शबिंदु सांधले तर सांधणाऱ्या रेषेनें छेदन रेषेचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

१८ दोन त्रिकोणांत एकाचा एक कोन व दुसऱ्याचा एक कोन ह्यांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर असली व एकाचा दुसरा कोन दुसऱ्याच्या दुसऱ्या कोनाबरोबर असला तर एकाचा तिसरा कोन व दुसऱ्याचा तिसरा

कोन ह्यांच्या जवळच्या बाजू परस्पर प्रमाणांत अस-तात.

१९ समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायामध्यें एक बिंदु घे-ऊन त्यांतून एक रेघ केली असतां तिनें एका बाजूचा आंतल्या भागानें खंड पडतो व दुसऱ्या बाजूचा बाहेरील भागानें खंड पडतो, त्यास ते दोन्ही खंड बरोबर अस-ल्यास खंड करणाऱ्या रेघेचे पायामध्यें दोन समान भाग पडतात.

२० त्रिकोणामध्यें एक बिंदु घेऊन त्यामधून त्रिकोणा-च्या कोणबिंदूंपासून समोरच्या बाजूंस मिळेत तों पर्यंत रेषा केल्या, आणि शिरोबिंदूतून पायाशीं समांतर अशी रेषा केली व पायाचे ज्या बिंदूंत खंड झाले आहेत त्या बिंदूपासून दुसऱ्या दोन बाजूंचे ज्या बिंदूंत खंड झाले आहेत त्या बिंदूंतून रेषा केल्या, तर त्यांच्या मध्यें पायाशीं समांतर केलेल्या रेघेचा जो भाग सांपडतो त्याचे शिरो बिंदूमध्यें दोन समान भाग होतात.

२१ त्रिकोणाच्या शिरकोनापासून पायावर लंब करून त्यामध्यें एक बिंदु घेऊन त्यांतून पायाचे दोन टोंकां-तून समोरील बाजूंस मिळेत अशा रेषा केल्या तर पाया-तील छेदनबिंदूशीं दुसऱ्या दोन बाजूंतील छेदनबिंदूंस

सांधणाऱ्या रेषांनीं पायांशीं जे कोन पडतात ते समान असतात.

२२ ज्या रेषा गायन प्रमाणांत असतात त्यांस छेद-णाऱ्या रेषांचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

२३ त्रिकोणामध्यें एक बिंदु घेऊन त्यांतून त्रिकोणाच्या कोणबिंदूपासून समोरील बाजूंस मिळेत तों पर्यंत रेषा काढल्या आणि छेदन बिंदु सांधले तर कोणबिंदूपासून बाजू पर्यंत काढलेल्या रेषांचे खंड गायन प्रमाणांत पडतात, आणि छेदनबिंदूंस सांधणाऱ्या रेषा बाजू वाढवून त्यांस मिळत तों पर्यंत वाढविल्या तर बाजूंचे गाय-नप्रमाणांत खंड पडतात.

२४ त्रिकोणाच्या बाहेर किंवा आंत एकबिंदु घेऊन त्यांतून कोनांपासून त्यां समोरील बाजूंस मिळत तों पर्यंत रेषा काढल्या असतां त्या रेषा ज्या स्थळीं मिळ-तात, तीं स्थळें सांधणाऱ्या रेषा बाजू वाढवून त्यांस मिळत तों पर्यंत वाढविल्या तर ज्या स्थळीं त्या मिळतात तीं तीन स्थळें एका सरळ रेषेंत येतात.

२५ अर्धवर्तुल, आणि वर्तुळपाद हीं एका ज्येवर असलीं तर त्यांचे कौंसांमध्यें जें क्षेत्र सांपडतें तें ज्याचा कर्ण ती ज्या आहे अशा समद्विभुजकाटकोन त्रिकोणा-

बरोबर होईल.

२६ त्रिकोणाची उंची, शिरकोन आणि दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी हीं सांगितलीं आहेत तर तो त्रिकोण काढावयाचा.

२७ त्रिकोणाचा पाया, उंची, आणि दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजा बाकी हीं सांगितलीं असतां तो त्रिकोण काढावयाचा.

२८ त्रिकोणाची उंची, त्याच्या पायाकडील कोनांची वजाबाकी व दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी हीं सांगितलीं आहेत, तर तो त्रिकोण काढावयाचा.

२९ त्रिकोणाची उंची, त्याच्या पायाच्या दोन खंडांची वजाबाकी व त्याच्या दोन बाजूंची बेरीज किंवा वजाबाकी हीं सांगितलीं आहेत, तर तो त्रिकोण काढावयाचा.

३० त्रिकोणाची उंची, शिरकोन आणि सर्व बाजूंची बेरीज हीं सांगितलीं असतां तो त्रिकोण काढावयाचा.

POONA UNIVERSITY LIBRARY